Grundbegriffe der theoretischen Informatik (SS 2002)

Prof. Dr. Joachim Biskup

Leitung der Übungen: Martin Lauer, Thomas Leineweber,
Dirk Lühning, Ralf Menzel und Arnim Wedig

Präsenzübungsblatt Nr. 3

Präsenzaufgabe 1 (Begriffe)
Machen Sie sich gemeinsam die folgenden Begriffe klar:

- primitiv-rekursive Funktion,
- μ-rekursive Funktion,
- Gödelnummerierung,
- Komplexitätsmaß.

Präsenzaufgabe 2 (Primitiv-rekursive und μ-rekursive Funktionen)

1. Beschreiben Sie induktiv die Menge aller primitiv-rekursiven Funktionen über dem Alphabet Σ.
2. Beschreiben Sie induktiv die Menge aller μ-rekursiven Funktionen über dem Alphabet Σ.

Lösung:

1. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller primitiv-rekursiven Funktionen über Σ. Dann gilt:
   - $E \in \mathcal{F}$ mit $E : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gemäß
     $\forall x \in \Sigma^* : E(x) := \varepsilon$
   - $\forall a \in \Sigma : S_a \in \mathcal{F}$ mit $S_a : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gemäß
     $\forall x \in \Sigma^* : S_a(x) := xa$
   - $\forall 1 \leq j \leq n : P_j^n \in \mathcal{F}$ mit $P_j^n : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gemäß
     $\forall x_1, \ldots, x_n \in \Sigma^* : P_j^n(x_1, \ldots, x_n) := x_j$
   - Seien $g, h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{F}$ mit
     $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gemäß
     $\forall v_1, \ldots, v_m \in \Sigma^* : \exists v \in \Sigma^* : g(v_1, \ldots, v_m) := v$ und
     $h_i : {\Sigma^*}^n \to \Sigma^*$ gemäß
     $\forall w_1, \ldots, w_m \in \Sigma^* : \exists w \in \Sigma^* : h_i(w_1, \ldots, w_n) := w, i = 1, \ldots, n.$
     Dann ist auch $f : {\Sigma^*}^n \to \Sigma^*$ gemäß
     $\forall x_1, \ldots, x_n \in \Sigma^* : f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$
     primitiv-rekursiv, also $f := \mathcal{C}(g, h_1, \ldots, h_m) \in \mathcal{F}$

- Seien $g, (h_a)_{a\in\Sigma} \in \mathcal{F}$ mit
  $g : {\Sigma^*}^{n-1} \to \Sigma^*$ gemäß
  $\forall v_1, \ldots, v_{n-1} \in \Sigma^* : \exists v \in \Sigma^* : g(v_1, \ldots, v_{n-1}) := v$ und
  $h_a : {\Sigma^*}^{n+1} \to \Sigma^*$ für alle $a \in \Sigma$ gemäß
  $\forall w_1, \ldots, w_{n+1} \in \Sigma^* : \exists w \in \Sigma^* : h_a(w_1, \ldots, w_{n+1}) := w$.
  Dann ist auch $f : {\Sigma^*}^n \to \Sigma^*$ gemäß
  $\forall x_2, \ldots, x_n \in \Sigma^* : f(\varepsilon, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n)$ und
  $\forall y, x_2, \ldots, x_n \in \Sigma^*, a \in \Sigma : f(ya, x_2, \ldots, x_n) = h_a(y, f(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$
  primitiv-rekursiv, also $f := \mathcal{PR}(g, (h_a)_{a\in\Sigma}) \in \mathcal{F}$.

2. Analog zu der ersten Teilaufgabe, aber mit der Menge $\mathcal{F}_\mu$ der μ-rekursiven Funktionen statt $\mathcal{F}$ und einem zusätzlichen Aufzählungspunkt für die Minimierung.

Präsenzaufgabe 3 (Komposition von Funktionen)
Zeigen Sie: Die übliche Nacheinanderanwendung (Komposition) $f_2 \circ f_1$ von Funktionen $f_i : \Sigma^* \to \Sigma^*, i \in \{1, 2\}$ ist ein Spezialfall der Substitution $\mathcal{C}$.

Lösung:
Wie üblich ist $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$. Mit $m = n = i = 1$ entspricht f_2 der Funktion g und f_1 der Funktion h_i aus der Definition der Substitution.

Präsenzaufgabe 4 (Anwendung von Rekursionsgleichungen)
In der Vorlesung wurden die primitiv-rekursiven Funktionen
$\mathit{Succ} : \Sigma^* \to \Sigma^*, \mathit{Add} : {\Sigma^*}^2 \to \Sigma^*$ und $\mathit{Mult} : {\Sigma^*}^2 \to \Sigma^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{1\}$ in Form der folgenden Rekursionsgleichungen angegeben:

$$\begin{array}{rcl}
\mathit{Succ}(x) & := & S_1(x) \\
\mathit{Add}(\varepsilon, w) & := & P_1^1(w) \\
\mathit{Add}(y1, w) & := & S_1(P_2^3(y, \mathit{Add}(y, w), w)) \\
\mathit{Mult}(\varepsilon, w) & := & E(w) \\
\mathit{Mult}(y1, w) & := & \mathit{Add}(P_2^3(y, \mathit{Mult}(y, w), w), P_3^3(y, \mathit{Mult}(y, w), w))
\end{array}$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Rekursionsgleichungen

1. $2 + 2$
2. $2 \cdot 2$

Lösung
Σ^* entspricht der Menge $\mathbb{N}$, wenn man $w \in \Sigma^*$ als Einkodierung einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ auffasst.

1. $\mathit{Add}(11, 11)$
   $= S_1(P_2^3(1, \mathit{Add}(1, 11), 11))$
   $= S_1(\mathit{Add}(1, 11))$
   $= S_1(S_1(P_2^3(\varepsilon, \mathit{Add}(\varepsilon, 11), 11)))$
   $= S_1(S_1(\mathit{Add}(\varepsilon, 11)))$
   $= S_1(S_1(P_1^1(11)))$
   $= S_1(S_1(11)) = S_1(111) = 1111$

2. $\mathit{Mult}(11, 11)$
$= \mathit{Add}(P_2^3(1, \mathit{Mult}(1, 11), 11), P_2^3(1, \mathit{Mult}(1, 11), 11))$
$= \mathit{Add}(\mathit{Mult}(1, 11), 11)$
$= \mathit{Add}(\mathit{Add}(P_2^3(\varepsilon, \mathit{Mult}(\varepsilon, 11), 11), P_3^3(\varepsilon, \mathit{Mult}(\varepsilon, 11), 11)), 11)$
$= \mathit{Add}(\mathit{Add}(\mathit{Mult}(\varepsilon, 11), 11), 11)$
$= \mathit{Add}(\mathit{Add}(E(11), 11), 11)$
$= \mathit{Add}(\mathit{Add}(\varepsilon, 11), 11)$
$= \mathit{Add}(P_1^1(11), 11)$
$= \mathit{Add}(11, 11) \overset{\text{Teilaufg. 1}}{=} 1111$

Präsenzaufgabe 5 (Beispiele für primitiv-rekursive Funktionen)
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind:

1. Vorgängerfunktion $\mathit{Pred} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gemäß
$\mathit{Pred} := \begin{cases} x-1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $x \in \mathbb{N}$
2. Nichtnegative Differenz $\mathit{Sub} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gemäß
$\mathit{Sub}(y, x) := \begin{cases} x-y & \text{falls } x > y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$
3. Betrag einer Differenz $\mathit{Betr} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gemäß
$\mathit{Betr}(x, y) := \ |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$

Führen Sie den Nachweis, indem Sie die angegebenen Funktionen aus den Grundfunktionen E, $(S_a)_{a\in\Sigma}$ und $(P_j^n)_{1\le j\le n}$ durch endliche Anwendung von Substitution $\mathcal{C}$ und primitiver Rekursion $\mathcal{PR}$ erzeugen. Verwenden Sie das Alphabet $\Sigma = 1$ und identifizieren Sie Σ^* mit $\mathbb{N}$. Verwenden Sie ggf. auch die in der Vorlesung bereits als primitiv-rekursiv nachgewiesenen Funktionen *Succ*, *Add* und *Mult* (vgl. auch Präsenzaufgabe 4), sowie die nullstelligen Konstantenfunktionen $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabe 2 von Übungsblatt Nr. 3.

Lösung

1. Vorüberlegung: $\mathit{Pred}(0) = 0$, $\mathit{Pred}(x + 1) = x$
Formal: Primitive Rekursion mit $f = \mathit{Pred}$ und $n = 1$
$\mathit{Pred}(\varepsilon) := g \overset{g=C_0()}{=} C_0()$
$\mathit{Pred}(x1) := h_1(x, \mathit{Pred}(x)) \overset{h_1=P_1^2}{=} P_1^2(x, \mathit{Pred}(x))$
2. Vorüberlegung: $\mathit{Sub}(0, x) = x$,
$\mathit{Sub}(y + 1, x) = x - (y + 1) = x - y - 1 = (x - y) - 1 = \mathit{Sub}(y, x) - 1 = \mathit{Pred}(\mathit{Sub}(y, x))$
Formal: Primitive Rekursion mit $f = \mathit{Sub}$ und $n = 2$
$\mathit{Sub}(\varepsilon, x) := g(x) \overset{g=P_1^1(x)}{=} P_1^1(x)$
$\mathit{Sub}(y1, x) := h_1(y, \mathit{Sub}(y, x), x) \overset{h_1=\mathit{Pred}\circ P_2^3=\mathcal{C}(\mathit{Pred},P_2^3)}{=} \mathit{Pred}(P_2^3(y, \mathit{Sub}(y, x), x))$
3. Vorüberlegung: $|x - y| = \mathit{Sub}(x, y) + \mathit{Sub}(y, x) = \mathit{Add}(\mathit{Sub}(x, y), \mathit{Sub}(y, x))$
Formal: Substitution mit $f = \mathit{Betr}$, $g = \mathit{Add}$, $h_1 = \mathit{Sub}$. h_2 führt zu der Schwierigkeit, dass die Argumente vertauscht werden müssen. h_2 entsteht durch Substitution aus Sub, P_2^2 und P_1^2, d.h. $h_2 := \mathcal{C}(\mathit{Sub}, P_2^2, P_1^2)$.
Damit erhält man: $\mathit{Betr}(x, y) := \mathit{Add}(\mathit{Sub}(x, y), \mathit{Sub}(P_2^2(x, y), P_1^2(x, y)))$.

Die Lösung dieser Teilaufgabe enthält mit der Vertauschung der Argumente einen Hinweis auf die Lösung von Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt.