Fragenkatalog für Mathe bei Rosenberger
Lineare Algebra I und II, Analysis

Oliver Lazar

Mai-Juli 2001

Dieser Fragenkatalog bietet im Prinzip alles, was Du brauchst, um zu bestehen. Neben Lehrbüchern, Skripten etc. habe ich mich sehr am fast schon legendären Fragenkatalog von Martin Horst und Lars Hornbach, sowie an der genialen Skriptzusammenfassung von Michael Gregorius orientiert, sodass auch teilweise komplette Antworten übernommen worden sind. Viel Spaß beim Lernen!

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra

1.1 Matrizen

1.1.1 Welcher Zusammenhang besteht zwischen linearen Abbildungen und Matrizen?

Jede lineare Abbildung ist eindeutig durch eine Matrix bestimmt und umgekehrt. Es besteht also eine Bijektion zwischen beiden.
Bezüglich fest gewählter Basen $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ und $B_W = \{w_1, ..., w_m\}$ wird durch jede $m \times n$-Matrix $A = (a_{ik})$ eine lineare Abbildung $f_A : V \to W$ definiert, wobei gilt:

$$f_A(\sum_{k=1}^{n} x_k \vec{v_k}) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k)\vec{w_i}$$

Wie erhalte ich die Matrix A?
Die Vorgabe von A entspricht der Vorgabe der Bilder der Basisvektoren von V und zwar sind diese Bilder (genauer ihre Koordinatenvektoren bzgl. der Basis in W) gerade die Spalten von A.

1.1.2 Die Bedeutung einer linearen Abbildung:

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K. Dann heißt eine Abbildung $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung oder ein Vektorraum-Homomorphismus, wenn gilt:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \, \forall \, x, y \in V$$

und

$$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \, \forall \, \alpha \in K; \forall \, x \in V$$

Ist $V = W$, so nennt man φ einen Endomorphismus von V, ist φ bijektiv, so nennt man φ einen Isomorphismus.

1.1.3 Sie haben eine lineare Abbildung von $f : V \to W$. Was steht dann in der Matrix?

In den Spalten und in den Zeilen stehen die linear unabhängigen Basisvektoren.
Spalte: Bilder der Basisvektoren von V
Zeile: Bilder der Basisvektoren von W

1.1.4 Wie ändert sich die Matrix, wenn sich die Basis ändert?

Es ändern sich die Koordinatendarstellungen der Vektoren.
Koordinatenumrechnung durch reguläre Matrix C bzw. D.
Jeder Vektor der neuen Basis ist ja eine Linearkombination der Vektoren der alten Basis:

$$B_V$$

$$\widehat{B_V} = \{\widehat{v_1}, ..., \widehat{v_n}\} \Longrightarrow \widehat{V_k} = \sum_{i=1}^{n} C_{ik} V_i$$

Es ist also $\begin{bmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{bmatrix}_{B_V}$ der Koordinatenvektor von $\widehat{V_k}$ bezüglich der alten Basis.
$\Rightarrow$ Matrix C

InWorten:
Man stellt die neuen Basisvektoren als Linearkombination zu den Vektoren zur alten Basis dar, und trägt die Koeffizienten als Spalten in eine Matrix C ein.

neue Matrix $\widehat{A} = AC$ bei Basiswechsel in V
neue Matrix $\widehat{A} = D^{-1}A$ bei Basiswechsel in W
beides: $\widehat{A} = D^{-1}AC$

1.1.5 Was sind reguläre Matrizen?

Die Matrix $A \in M_n(K)$ heißt regulär, wenn sie bezüglich Multiplikation invertierbar ist, d.h. wenn eine Matrix A^{-1} existiert mit $A^{-1}A = E_n = AA^{-1}$. Andernfalls heißt A singulär. Die regulären Matrizen aus $M_n(K)$ bilden die sogenannte "allgemeine lineare Gruppe" $Gl(n, K)$.
- gehören zu den universell und eindeutig lösbaren Gleichungssystemen
- $A \in M_n(K)$ ist regulär $\Leftrightarrow$ f_A ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $rgA = n$
- wenn $Ax = b$ regulär und inverse Matrix A^{-1} bekannt, so ist die Lösung $x = A^{-1}b$.
- quadratische Matrix
- det $\neq 0$

Da der Rang rg A=n ist, sind alle Positionen auf der Hauptdiagonalen besetzt.
(Det. = Produkt der Hauptdiagonalen!)

1.1.6 Charakteristisches Polynom:

charakteristisches Polynom: $\det(\lambda I - A)$

Zunächst:
Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist ein Eigenvektor der Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = 3$, denn $Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x = \lambda x$.

Um die Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix A zu bestimmen, schreiben wir die Gleichung $Ax = \lambda x$ als $Ax = \lambda I x$ oder äquivalent dazu $(\lambda I - A)x = 0$.
Damit λ ein Eigenwert von A ist, muß die Gleichung eine nicht-triviale Lösung besitzen. $\Longrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$.
Diese Gleichung heißt charakteristische Gleichung von A, ihre Lösung sind die Eigenwerte von A. Entwickelt man $\det(\lambda I - A)$, so ergibt sich ein Polynom in λ, das als charakteristisches Polynom von A bezeichnet wird.

1.1.7 Wie diagonalisiert man eine Matrix?

Eine quadratische Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn eine invertierbare Matrix P existiert, sodass $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat. Man sagt dann: Die Matrix P diagonalisiert A.
äquivalente Aussagen:
- A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A hat n linear unabhängige Eigenvektoren

Möchte man nur feststellen, ob diagonalisierbar:
Die Dimension des Eigenraums jeder Nullstelle muß gleich der Vielfachheit dieser Nullstelle sein.

diagonalisierbar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -6 & \lambda + 1 \end{bmatrix}}_{charakteristisches\ Polynom} \lambda = 1,\ \lambda = -1$$

Nullstellen bei 1 und -1.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ mit } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nicht diagonalisierbar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -6 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \lambda = 1$$

Es liegt eine zweifache Nullstelle bei 1 vor, die Dimension des Eigenraumes ist aber nur einfach $\Rightarrow$ Matrix A ist folglich nicht diagonalisierbar.

1.1.8 Gebrauch von Matrizen bei linearen Gleichungssystemen:

ein lineares Gleichungssystem hat folgende Form:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \rightarrow als\ Matrix \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}}^{erweiterte\ Matrix}$$

Ziel ist es nun die Matrix in eine einfache Form zu bringen→mittels elementarer Zeilenumformungen und Gauß-Algorithmus auf normierte Zeilenstufenform bringen.
Oder:
Man invertiert die Matrix, da gilt: $A * x = b$ so gilt dann: $x = A^{-1} * b$.

1.1.9 Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen:

Ein LGS (lineares Gleichungssystem) ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$rgA = \underbrace{rg(A, b)}_{erweiterte\ Matrix}$$

In Worten:
Der Rang der Matrix ist gleich dem Rang der erweiterten Matrix.

Spezialfälle:
Sei $A \in M_{(m \times n, k)}$ und $b \in K^m$ mit $rgA = rg(A, b)$.
a) $rgA = n \Leftrightarrow f_A$ ist injektiv $\Leftrightarrow Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\longrightarrow$ nur wenn $n \leq m$
b) $rgA = m \Leftrightarrow f_A$ ist surjektiv $\Leftrightarrow Ax = b$ ist universell lösbar $\longrightarrow$ nur wenn $n \geq m$

1.1.10 Rangbestimmung einer Matrix:

Es gilt folgende Beziehung:
$rgA =$ Anzahl linear unabhängiger Zeilen-/Spaltenvektoren.
Mit Hilfe der elementaren Zeilenumformungen, die den Rang nicht verändern, läßt sich die Matrix auf eine Zeilen-Stufenform bringen. Man kann dann den Rang aus dieser Matrix ablesen. (Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen!)

1.1.11 Elementare Zeilenumformungen:

1) Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Konstanten
2) Vertauschen von zwei Zeilen
3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (keine Änderung des Ranges)

1.1.12 Normierte Zeilenstufenform:

...ist das Resultat des Gauß-Eliminationsverfahrens.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & ... & 0 & * & ..... & * \\ & & & & 1 & * & 0 & & 0 & * & & . \\ & & & & & & 1 & & 0 & * & & . \\ & & & & & & & & 1 & * & & . \end{bmatrix}$$

- nur 1-en auf der Diagonalen
- die erste Zeile kann links Nullen haben, muß aber nicht
- jede Zeile hat links mindestens eine Null mehr als die darüber
- die letzten Zeilen können auch nur aus Nullen bestehen

1.1.13 Gauß-Elimination:

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.
Durch elementare Zeilenumformungen wird die Matrix in Dreiecksform/Zeilenstufenform gebracht.
Beispiel:

$$\begin{array}{lll} 2x_1 & +x_2 & =3 \\ & -4x_2 & =4 \end{array}$$

Durch Rückeinsetzen: $x_2 = -1$; $x_1 = 2$

1.1.14 Welche Möglichkeiten gibt es eine Matrix zu invertieren?

Gibt es für eine $n \times n$-Matrix A eine Matrix B mit $AB = E_n$, heißt B die Inverse zu A $\Rightarrow$ $B = A^{-1}$.
$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$
a) Berechnung mit dem Gauß-Algorithmus: (für Matrizen $> 3 \times 3$) mit $r = n$
1. Man schreibt die $n \times n$-Einheitsmatrix rechts neben die Matrix A
2. Durch Umformungen des Gauß-Alg. wird aus der Matrix A die Einheitsmatrix E_n gemacht. Dabei werden alle Umformungen auch mit der Matrix auf der rechten Seite vorgenommen.
3. Danach steht auf der rechten Seite A^{-1}.

$$(A \mid E_n) \Rightarrow \left(E_n \mid A^{-1}\right)$$

Die Zeilenumformungen können durch Linksmultiplikation von Transformationsmatrizen realisiert werden

$$T(E_n \mid A) = (T \mid TA) = (T \mid E_n)$$

Somit entspricht T der Inversenmatrix zu A.

b) Berechnung nach Laplace:
Es sei $A \in Gl(n, K)$. Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+k} \det A_{ik}\right)^T$$

z.B. für:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

1.1.15 Definition der Determinante:

Sei A eine quadratische Matrix. Wir bezeichnen die Determinantenfunktion mit det, wobei wir $\det(A)$ als Summe aller vorzeichenbehafteter elementaren Produkte aus A definieren. Die so berechnete Zahl nennen wir Determinante von A. Die Determinante einer Matrix $A \in M_n(K)$ ist definiert als:

$$\sum_{\pi \in S_n} \sigma(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot ..... \cdot a_{n\pi(n)}$$

Zu dieser Formel$\longrightarrow$ Erklärung und Definition von Signum:
Es wird also eine Summe gebildet, sodass aus jeder Zeile und Spalte genau ein Element ausgewählt wird. Dabei werden alle möglichen Kombinationen (oder besser Permutationen) berücksichtigt. Zusätzlich wird das Signum der entsprechenden Permutation berechnet.
(S_n ist eine Permutationsgruppe)
Signum $\sigma(\pi)$ einer Permutation $\pi \in S_n$:

$$\sigma(\pi) := \prod_{1 \le i \le j \le n} \frac{\pi_{(i)} - \pi_{(j)}}{i-j} \in \{-1, 1\}$$

Das Signum bildet also aus der Menge der Permutationen in die Menge {-1,1} ab.

1.1.16 Permutation:

Eine Permutation der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ ist eine Anordnung dieser Zahlen ohne Auslassungen oder Wiederholungen.
z.B.
Es gibt sechs verschiedene Permutationen der Menge {1,2,3}, nämlich

$$\begin{array}{ccc} (1,2,3) & (2,1,3) & (3,1,2) \\ (1,3,2) & (2,3,1) & (3,2,1) \end{array}$$

$\Rightarrow$siehe auch Permutationsbaum

1.1.17 Eigenschaften einer Determinante:

1) $\det E_n = 1$
2) $\det A = 0$, wenn A mindestens eine Nullzeile enthält
3) $\det A = 0$, wenn A zwei gleiche Zeilen enthält
4) $\det B = \lambda \det A$, wenn B dadurch entsteht, dass man eine Zeile in A mit λ multipliziert
5) Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, so gilt: $\det B = -\det A$

6) Entsteht B aus A durch Addition einer mit λ multiplizierten Zeile, so gilt: $\det B = \det A$

charakterisierende Eigenschaft der Determinante sind die elementaren Zeilenumformungen.

1.1.18 Berechnung der Determinante:

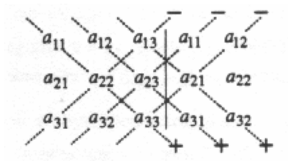
$n = 1 :$ $\det A = a_{11}$

$n = 2 :$ $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ⇒Hauptdiagonale-Nebendiagonale

$n = 3 :$ Merkregel von Sarrus:

$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Die ersten beiden Spalten nochmal rechts daneben schreiben und die Diagonalen bilden:



<u>Berechnung mit Gauß:</u>
Matrix auf Dreiecksform bringen, dann ist $\det A =$ dem Produkt der Hauptdiagonalen $(a_{11} * a_{22} * ... * a_{nm})$.

1.1.19 Laplace-Entwicklung (Determinante):

Im folgenden sei A_{ik} die Matrix, die entsteht, wenn man in A die i-te Zeile und k-te Spalte streicht. Dann gilt:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

Man nennt dies die Laplaceentwicklung von $\det A$ nach der i-ten Zeile und entsprechend gilt für die Laplaceentwicklung nach der k-ten Spalte:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

1.1.20 Was ist die Cramersche Regel?

Sie liefert eine Möglichkeit, die Lösungen eines Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten zu untersuchen.
Ein lineares System $Ax = b$ von n Gleichungen und n Unbekannten mit $\det(A) \neq 0$ (und $m = n$) ist eindeutig lösbar. Die Lösung ist gegeben durch

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, ..., x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

wobei die Matrix A_j dadurch entsteht, dass die j-te Spalte von A durch

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ersetzt wird.

1.2 Halbgruppen, Gruppen, Ringe, Körper

1.2.1 Was sind Halbgruppen?

Gegeben ist eine nichtleere Menge $M \neq \emptyset$ mit einer Komposition $*$. Dann heißt $(M, *)$

Halbgruppe wenn gilt: $*$ ist assoziativ. $\longrightarrow$ z.B. $(N, +)$

Monoid wenn gilt $(M, *)$ ist eine Halbgruppe und zudem existiert ein neutrales Element e. $\longrightarrow$ z.B. $(N_0, +)$

Gruppe wenn $(M, *)$ ein Monoid ist und es zu jedem Element $x \in M$ ein eindeutiges Element x^{-1} gibt, sodass gilt:

$$x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$$

Ist die Verknüpfung $*$ kommutativ, so spricht man von abelscher Gruppe. $\longrightarrow$ z.B. $(Z, +)$

1.2.2 Was ist ein Ring/Körper?

Ring:
Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine nichtleere Menge R mit zwei Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$(Multiplikation) für die gilt:

R1: $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe

R2: $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe

R3: Es gelten die Distributivgesetze:

$$\forall\, x, y, z \in R : \begin{cases} x(y+z) = xy + xz \\ (x+y)z = xz + yz \end{cases}$$

Das neutrale Element bezüglich der Addition wird Nullelement genannt.
Ist $(R, \cdot)$ ein Monoid, so nennt man das neutrale Element der Multiplikation Einselement.

Körper
Ein Ring R heißt Körper, wenn gilt:

R4: $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

in Worten:
Ein Körper ist ein Ring, wobei die von Null verschiedenen Elemente eine kommutative (=abelsche) Gruppe bilden.

Beispiele:
Mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ist Z ein Ring und Q und R sind Körper.

1.2.3 Warum ist ein Körper immer nullteilerfrei?

Weil $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist und daher für zwei beliebige $x, y \in R$ gilt:

$$xy \in R \setminus \{0\}$$

Es gibt also keine von Null verschiedenen Elemente, die auf die Null abbilden.

1.2.4 Homomorphismus:

Halbgruppenhomomorphismus:
Sei $(M, \circ)$ eine Halbgruppe und $(N, *)$ eine Menge mit Verknüpfung.
Dann heißt eine Abbildung $f: M \to N$ Halbgruppenhomomorphismus, wenn gilt:

$$\forall\, x, y \in M : f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

Monoidhomomorphismus:
Seien $(M, \circ)$ und $(N, *)$ Monoide mit den neutralen Elementen e_M und e_N.
Dann heißt eine Abbildung $f: M \to N$ Monoidhomomorphismus, wenn gilt:
f ist Halbgruppenhomomorphismus und $f(e_M) = e_N$

Gruppenhomomorphismus:
Sind $(M, \circ)$ und $(N, *)$ Gruppen, so heißt eine Abbildung $f: M \to N$ Gruppenhomomorphismus, wenn gilt:
f ist ein Monoidhomomorphismus und $\forall\, x \in M : f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Beispiele:
$f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$

1.2.5 Was ist ein Normalteiler?

Ist G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G, so heißt U Normalteiler, wenn gilt:

$$\forall\, a \in G : aU = Ua$$

Ein Schnellerkennungsprogramm für Normalteiler sieht wie folgt aus:

$$\forall\, a \in G : aUa^{-1} \subseteq U$$

1.2.6 Was ist ein Nullteiler?

Wenn das Produkt zweier von Null verschiedener Elemente das Nullelement ist!
Also:
$a \circ b = 0$ für $a \neq 0$, $b \neq 0$

1.2.7 Erster Isomorphiesatz für Halbgruppen:

Seien M,N Halbgruppen und sei $f : M \to N$ ein Halbgruppenhomomorphismus. Dann wird durch

$$xRy \;:\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)\, \forall\, x, y \in M)$$

eine Kongruenz definiert (die durch f induzierte Kongruenz oder auch induzierte Kongruenz zu einer Abbildung), $f(M)$ ist isomorph zu M/R und zwar existiert genau ein Isomorphismus

$$h :\; M/R \mapsto f(M)$$

1.2.8 Welche Kongruenz (außer der von f induzierten) kennen Sie noch?

Reeskongruenz
Sei M Halbgruppe und H Ideal, dann ist $xRy \;\Leftrightarrow\; x, y \in H \;\vee\; x = y$

1.2.9 Isomorphiesatz für Gruppen:

Seien $(G, \cdot)$ und $(H, +)$ Gruppen und $f : G \to H$ ein Homomorphismus, so gilt:

$$G/\ker f \equiv f(G)$$

Das Bild des Homomorphismus ist also isomorph zur Faktorgruppe des Kerns der Abbildung.

1.2.10 Kongruenz

Sei $(M, \cdot)$ eine Halbgruppe und R eine Äquivalenzrelation auf M

R heißt Linkskongruenz $:\Leftrightarrow\; \forall\, x, x', y \in M\; (xRx' \;\Rightarrow\; yxRyx')$

R heißt Rechtskongruenz $:\Leftrightarrow\; \forall\, x, x', y \in M\; (xRx' \;\Rightarrow\; xyRx'y)$

R heißt Kongruenz $:\Leftrightarrow$ R ist links- und rechtskongruent

1.2.11 Faktorhalbgruppe:

Sei $(M, \cdot)$ eine Halbgruppe und R eine Kongruenz auf M. Dann bildet M/R, die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich R, mit der durch

$$R(x) \cdot R(y) \;:=\; R(xy)\, \forall\, x, y \in M$$

definierten Verknüpfung wieder eine Halbgruppe, die Faktorgruppe von M nach R.

1.2.12 Faktorgruppe

Hat man eine Gruppe $(G, \cdot)$ und U ist ein Normalteiler, so kann man die sogenannte Faktorgruppe G/U bilden:

$$G/U = \{aU \mid a \in G\}$$

Mit der folgenden Verknüpfung bildet G/U tatsächlich eine Gruppe:

$$xU \cdot yU = (xy)U$$

1.2.13 freie Halbgruppe:

Sei $E \neq \emptyset$; im folgenden wird E Alphabet genannt und die Elemente nennen wir Buchstaben. Ein Wort (der Länge $n \geq 1$) ist eine Sequenz aus n Buchstaben. $F(E)$ bezeichne die Menge aller Wörter mit Buchstaben aus E. Durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) der Wörter wird eine Verknüpfung "·" definiert:

$$(x_1 ... x_m) \cdot (y_1 ... y_n) \;:=\; x_1 x_2 ... x_m y_1 y_2 ... y_n$$

$(F(E), \cdot)$ heißt die freie Halbgruppe über E.

1.2.14 Was ist Z/nZ?

($\to$ Restklassenring modulo n)
Mit der Addition $(Z/nZ, +)$ handelt es sich um eine abelsche gruppe.
Wenn n eine Primzahl ist, dann ist Z/nZ ein Körper.

1.2.15 Warum ist Z/nZ nur ein Körper, wenn n eine Primzahl ist?

Da $(Z/nZ, +)$ eine abelsche Gruppe ist, müssen wir uns noch fragen, wann $(Z/nZ, \cdot)$ eine Gruppe ist. Damit $(Z/nZ, \cdot)$ eine Gruppe ist, muß gelten, dass Gleichungen eindeutig lösbar sind. So hat die Gleichung $\overline{a}+\overline{x}=\overline{b}$ in $(Z/nZ, +)$ immer eine eindeutige Lösung, nämlich $\overline{x}=\overline{b}-\overline{a}$. Es gibt jedoch Beispiele für die eine solche Gleichung keine Lösung hat. So z.B. die Gleichung $\overline{2}\cdot\overline{x}=\overline{3}$ in $(Z/6Z, \cdot)$.
Wir müssen uns also die Frage stellen, wann denn die Gleichung $\overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{b}$ eine Lösung hat. Zuerst stellen wir fest, dass folgende Äquivalenz gilt:

$$\exists\,\overline{x}\in Z/nZ:\ \overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{b}\ \Leftrightarrow\ \exists\,x,y\in Z:\ ax+ny=b$$

Fragestellung:
Welche $b\in Z$ lassen sich in der Form $b=ax+ny$ mit $x,y,a,n\in Z$ darstellen? Das sind die Vielfachen des ggT von a und n. Nach dem Lemma von Bezout gilt nämlich, dass wenn d der ggT von a und n ist, sich d darstellen läßt als

$$ggT(a,n)=d=ax+ny$$

Also lassen sich auch Vielfache des ggT in dieser Form darstellen, wegen:

$$m\cdot d=m(ax+ny)=a\underbrace{mx}_{\in Z}+n\underbrace{my}_{\in Z}$$

Demnach besitzt doch $ax+ny=b$ eine Lösung, wenn der ggT von a und n ein Teiler von b ist, also $ggT(a,n)\mid b$ oder anders gesagt, wenn b ein Vielfaches des ggT von a und n ist. Die Gleichung besitzt also immer eine eindeutige Lösung für $ggT(a,n)=1$. Und dies ist immer der Fall, wenn n eine Primzahl ist.

1.3 Ordnungsstrukturen, Verbände und boolsche Algebra

1.3.1 Halbordnung/ Ordnung

Sei $M\neq\emptyset$ und R eine Relation auf M.

R heißt
- reflexiv :⇔ $(x,x)\in R\ \forall x\in M$

- symmetrisch :⇔ $((x,y)\in R\ \Rightarrow\ (y,x)\in R)\ \forall x,y\in M$

- transitiv :⇔ $((x,y)\in R\, und\, (y,z)\in R\ \Rightarrow\ (x,z)\in R)\ \forall x,y,z\in M$

- antisymmetrisch :⇔ $((x,y)\in R\, und\, (y,x)\in R\ \Rightarrow\ x=y)\ \forall x,y\in M$

Die zu R inverse Relation R^{-1} ist definiert durch

$$R^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in R,\ x,y\in M\}$$

a) R heißt eine Halbordnung (oder partielle Ordnung) auf M :⇔ R ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
(M,R) wird dann eine halbgeordnete Menge oder kurz Halbordnung genannt.

Beispiel:
Auf N wird durch die Teilerrelation $x|y\Leftrightarrow y=kx$ für ein $k\in N$ eine Halbordnung definiert.

b) Zwei Elemente x und y aus M heißen vergleichbar, wenn $(x,y)\in R$ oder $(y,x)\in R$ gilt. Eine Halbordnung heißt Ordnung oder genauer totale Ordnung, wenn je zwei verschiedene Elemente von M vergleichbar sind.

1.3.2 Hasse-Diagramme:

Ein Hasse Diagramm einer Ordnung ist die graphische Darstellung einer Ordnungsrelation in einer endlichen Menge M.
Für jedes Element in M zeichnet man einen Punkt und markiert ihn mit dem zugeordneten Element. Die Punkte a,b werden nur genau dann durch eine Strecke verbunden, wenn a,b vergleichbar und benachbart sind.
Wenn $a<b\ \longrightarrow\ b$ ist oberer Nachbar von a (nur wenn es kein $c:\ a<c<b$ gibt), dann ist b oberhalb von a zu zeichnen.

1.3.3 Wann heißt ein Verband distributiv?

Ein Verband $(V,\leq)$ heißt distributiv, wenn gilt:

$$\forall x,y,z\in V\ :\ \left\{\begin{array}{l} x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\\ x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)\end{array}\right.$$

1.3.4 Wann heißt ein Verband modular?

Ein Verband $(V, \leq)$ heißt modular, wenn gilt:

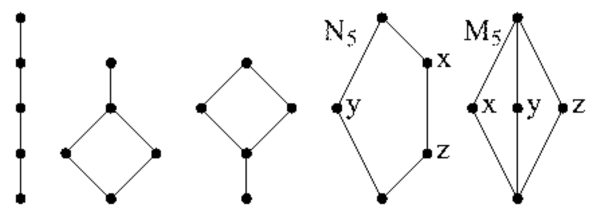
$$\forall x, y, z \in V \ \wedge x \leq z \ : \ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

1.3.5 Wann heißt ein Verband komplementär?

Ein Verband $(V, \leq)$ heißt komplementär, wenn es zu jedem $x \varepsilon V$ mindestens ein $y \varepsilon V$ gibt, sodass gilt:

$$x \wedge y = 0 \wedge x \vee y = 1$$

1.3.6 Geben Sie alle Verbände mit 5 Elementen an!



1-3) sind distributiv und modular, nicht komplementär

4) N_5 : nicht distributiv, nicht modular (da nicht immer $x \leq z$), komplementär
Die fehlende Distributivität wird bezeugt durch:

$$x = x \wedge (y \vee z) \neq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = z$$

5) M_5 : nicht distributiv, modular, komplementär
Die fehlende Distributivität wird bezeugt durch:

$$x = x \wedge (y \vee z) \neq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0$$

1.3.7 Warum ist keiner ein boolscher Verband (oder: Def. boolscher Verband)?

Ein Verband $(V, \leq)$ heißt boolesch, wenn V zugleich distributiv und komplementär ist.
Hierzu der Satz von Stone (nächste Frage)

1.3.8 Satz von Stone:

auch: Anzahlsatz für boolesche Verbände
Jeder boolesche Verband $(V, \leq)$ ist isomorph zu einem Potenzmengenverband $(P_{(A)}, \subseteq)$, wobei A die Menge der Atome ist. Es gilt:

$$|A| = n, \, n \in N_0 \ \Rightarrow \ P_{(A)} = 2^n$$

Also gilt:

$$|V| = 2^n, \, n \in N_0,$$

wobei n die Anzahl der Atome ist.

Durch Konkatenation der Atome eines booleschen Verbandes erhält man den Potenzmengenverband.

1.3.9 Was versteht man unter Atomen?

Besitzt $(V, \leq)$ ein kleinstes Element, so heißen die oberen Nachbarn hiervon Atome.

1.3.10 Unterschied zwischen Verband und boolescher Verband:

Verband:
Eine Halbordnung $(M, \leq)$ heißt Verband, wenn zu je zwei Elementen a,b ein kleinstes gemeinsames Oberelement gibt (Supremum $a \sqcup b$), sowie ein größtes gemeinsames Unterelement, das Infimum $a \sqcap b$.
Supremum $\{x \mid x \in M \wedge x \geq a \wedge x \geq b\}$
Infimum $\{x \mid x \in M \wedge x \leq a \wedge x \leq b\}$

boolescher Verband:
Ein Verband $(V, \leq)$ heißt boolesch, wenn V zugleich distributiv und komplementär ist. Ein boolescher Verband enthält 2^n Elemente.

1.3.11 Wie kann man eine boolesche Algebra charakterisieren?

$\rightarrow$ ist ein endlicher Verband

Axiome einer booleschen Algebra:
- Assoziativgesetz für $\wedge$ und $\vee$
- Kommutativgesetz
- Absorptionsgesetz
- Distributivgesetz
- Eigenschaften von 0 und 1
- Eigenschaften des Komplements

Eine boolesche Algebra ist eine Menge von Elementen, für die zwei zweistellige Operationen $\wedge, \vee$ und eine einstellige Operation $'$ erklärt sind.

Man kann eine boolesche Algebra über das kartesische Produkt definieren.
B bezeichne den kleinsten booleschen Verband (boolesche Algebra) mit den Elementen 0 und 1.
Der boolesche Verband mit 2^n Elementen ist kartesisches Produkt von n Exemplaren B und läßt sich demgemäß explizit angeben als Menge der n-stelligen 0-1-Sequenzen
Supremum: durch koordinatenweise Addition
Infimum: durch koordinatenweise Multiplikation

1.3.12 S-Summe (Bool-Summe/ Bool-Produkt):

S-Summe entspricht der Bool-Summe

$$a \underset{S}{+} b = \begin{cases} 0 & falls\, a = b = 0 \\ & 1\, sonst \end{cases} \qquad (fr\, a, b \in \{0,1\})$$

$\underset{B}{+}$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$a \wedge b = ab$ und $a \vee b = a \underset{S}{+} b$

1.3.13 Wie kann man einen booleschen Verband konstruieren?

Boolescher Verband B={0,1}

aus B läßt sich jeder endliche Boolesche Verband mit mehr als einem lement konstruieren. Unter B^n, $n \geq 1$ verstehen wir das n-fache kartesische Produkt von B mit sich selbst, d.h. die Menge der n-stelligen 0-1-Folgen, versehen mit koordinatenweiser Multiplikation und boolescher Addition, d.h.

$$(a_1, ..., a_n) \wedge (b_1, ..., b_n). = (a_1, ..., a_n) \cdot (b_1, ..., b_n) := (a_1 b_1, ..., a_n b_n),$$

$$(a_1, ..., a_n) \vee (b_1, ..., b_n). = (a_1, ..., a_n) \underset{S}{+} (b_1, ..., b_n) := (a_1 \underset{S}{+} b_1, ..., a_n \underset{S}{+} b_n)$$

mit $a_i, b_i \in \{0, 1\}$

1.3.14 Was wissen Sie über Boolfunktionen?

Unter einer Boolfunktion verstehen wir eine Abbildung $f : B^n \to B^m$ mit $m, n \in N$.
Eine Abbildung $f : B^n \to B$ bezeichnen wir als Schaltfunktion und die Menge $\{x \mid x \in B^n \wedge f(x) = 1\}$ heißt die Einsmenge der Schaltfunktion.
Konkret wird eine solche Boolfunktion dann von einem Schaltwerk (z.B. albaddierer) geliefert, das jedem Input einen entsprechenden Output zuordnet.

Es gibt (für n=1):

	Funktionswerte			
Variablenwerte 0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
Bezeichnung der Funktion	0 Nullfunktion	x Identität	$\overline{x}$ Komplement	1 Einsfunktion

1.4 ggT-Berechnung

1.4.1 Euklidischer Algorithmus zur ggT-Berechnung:

Bestimmung des ggT zweier ganzer Zahlen:
Seien $a, n \in Z$ und $a \neq 0$.

Setze $r_0 := a$ und $r_1 := |n|$ und bestimme r_{k+2} für $k \geq 0$ durch Division mit Rest, solange $r_{k+1} \neq 0$, d.h.

$$r_k = q_k r_{k+1} + r_{k+2} \quad mit \quad 0 \leq r_{k+2} < r_{k+1}$$

Ist $r_k \neq 0$ und $r_{k+1} = 0$, so ist $r_k = ggT(a, n)$.

z.B.
$ggT(91, 133)$

$133 = 91 * 1 + 42$
$91 = 42 * 2 + 7$
$42 = 7 * 6$

Also ist $ggT(91, 133) = 7$.

1.4.2 Beweis des Euklidischen Algorithmus:

Die Division mit Rest liefert eine Kette von Gleichungen
(0) $r_0 = q_0 r_1 + r_2$
(1) $r_1 = q_1 r_2 + r_3$
....
(m-1) $r_{m-1} = q_{m-1} r_m + r_{m+1}$
(m) $r_m = q_m r_{m+1}$,

die notwendig nach endlich vielen Schritten abbricht.
Durchläuft man diese Kette von unten nach oben, so sieht man, dass r_{m+1} Teiler von r_m, r_{m-1} u.s.w. und schließlich von $r_1 = n$ und $r_0 = a$ ist.
Durchläuft man sie von oben nach unten, so zeigt sich, dass ein beliebiger gemeinsamer Teiler von a und n auch r_2, r_3 u.s.w. und schließlich r_{m+1} teilt.

Also ist $d := r_{m+1}$ der ggT von a und n.

1.4.3 Lemma von Bezout

Siehe auch 1.2.15
Das Lemma von Bezout besagt, dass wenn d der ggT von $a, n \in Z$ ist, zwei ganze Zahlen $x, y \in Z$ existieren mit:

$$ggT(a, n) = d = ax + ny$$

Der ggT läßt sich also als Linearkombination von a und n schreiben.

1.5 Kombinatorik

1.5.1 Was wissen Sie über Binomialkoeffizienten?

Für $n, k \in N_0$ ist definiert

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} . = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i},$$

die <u>Binomialkoeffizienten</u> "n über k".

<u>Eigenschaften:</u> Für $n, k \in N_0$ gilt
a) $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$
b) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0$ für $n < k$
c) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ für $k \leq n$
d) $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ *oder* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ $(Rekursionsformel)$
Zur Verdeutlichung der Rekursionsformel → das Pascalsche Dreieck (s. nächste Frage)

1.5.2 Was versteht man unter dem Pascalschen dreieck?

Das Pascalsche Dreieck verdeutlicht die Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten:

n\k	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

Es gilt ja $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$, was sich auch aus der Tabelle ergibt. Wollen wir z.B. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ berechnen, so schauen wir in der Tabelle $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$ nach. Also ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + 3 = 6$. Mit dieser Formel kann man also sukzessive größere Binomialkoeffizienten berechnen.

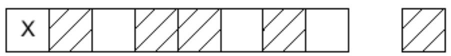
1.5.3 Zeige, dass die Anzahl der k-Teilmengen einer M-Menge $\binom{n}{k}$ ist!

$a(n,k)$ sei die gesuchte Anzahl. Dann gelten folgende Bedingungen:

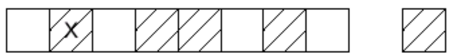
1) $a(0,k) = 0$ für $k > 0$, denn es gibt keine Möglichkeit $k > 0$ Elemente aus nicht vorhandenen Elementen auszusuchen.
2) $a(n,0) = 1$ für alle n. Denn man hat genau eine Möglichkeit 0 Elemente aus n auszuwählen, nämliche die, einfach keines zu wählen.

Für die anderen Fälle $n, k \geq 1$ gehen wir ähnlich vor, wie im vorhergehenden Beweis. Wir nehmen $|M| = n + 1$ an und möchten wissen, wie viele $k + 1$-Auswahlen es gibt. Wieder wählen wir ein ausgezeichnetes Element $x \in M$ aus. Wir unterscheiden auch hier zwei Fälle:

1) x kommt in der k-Auswahl nicht vor. Die Anzahl dieser Auswahlen entspricht $a(n, k+1)$, denn man muß aus den restlichen n Elementen immer noch $k + 1$ auswählen.



2) x kommt in der k-Auswahl vor. Dann müssen wir aus den restlichen n Elemente noch k Elemente auswählen. Also gibt es $a(n,k)$ solcher Auswahlen.



Insgesamt ergibt dies also die Formel $a(n+1, k+1) = a(n, k+1) + a(n,k)$. Betrachtet man nun nocheinmal die Binomialkoeffizienten, so fallen folgende Entsprechungen auf:
- $a(0,k) = 0 = \binom{0}{k}$, $k > 1$

- $a(n,0) = 1 = \binom{n}{0}$, $\forall n$
- $a(n+1, k+1) = a(n, k+1) + a(n,k) \leftrightarrow \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Beide Zahlenfolgen genügen also denselben Anfangsbedingungen und derselben Rekursion. Also sind sie gleich.

1.5.4 In welcher Form treten die Binomialkoeffizienten im binomischen Satz auf?

Es gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dementsprechend gibt es für $a = b = 1$ folgende Identität:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Desweiteren für $a = -1$ und $b = 1$:

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

1.5.5 Was versteht man unter k-Permutation/-Variation/-Kombination/-Repetition?

Oder: Was können Sie mir über die verschiedenen Abzählverfahren erzählen?

Sei M Menge mit $|M| = n$ und $1 \leq k \leq n$.

a) Eine <u>k-Permutation</u> von M ist ein geordnetes k-tupel verschiedener Elemente aus M.
Ihre Anzahl ist $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1) = \binom{n}{k} k! =: (n)_k$.

b) Eine <u>k-Variation</u> von M ist ein geordnetes k-tupel von Elementen aus M, wobei Elemente mehrfach auftreten dürfen.
ihre Anzahl ist n^k.

c) Eine <u>k-Kombination</u> von M ist eine ungeordnete Auswahl von k verschiedenen Elementen von M.
Ihre Anzahl ist $\binom{n}{k}$.

d) Eine <u>k-Repetition</u> von M ist eine ungeordnete Auswahl von k nicht notwendig verschiedenen Elementen aus M.

Ihre anzahl ist $\binom{n+k-1}{k}$.

Tabellarische Übersicht:
(passend auch zur Frage: Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einer n-Menge eine k-Menge auszuwählen?)

Auswahl von k Elementen aus n Elementen	ungeordnet	geordnet
ohne Wiederholungen	$\binom{n}{k}$ k-Kombination	$\binom{n}{k}k!$ k-Permutation
mit Wiederholungen	$\binom{n+k-1}{k}$ k-Repetition	n^k k-Variation

Erklärung am Beispiel von Urnenversuchen: (Rosi fragt auch oft nach den "Spielbudenversuchen")

k-Kombination: ist die Anzahl der Ziehungen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge (z.B. Zahlenlotto)

k-Repetition: ist die anzahl der Ziehungen mit Zurücklegen und ohne Reihenfolge

k-Permutation: ist die Anzahl der Ziehungen ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

k-Variation: ist die Anzahl der Ziehungen mit Zurücklegen und mit Reihenfole

1.5.6 Was stellen diese Formeln denn bzgl. Abbildungen dar?

Kombination:
$\binom{n}{k} \to$ Anzahl aller injektiven, monoton wachsenden Abbildungen einer k-Menge in eine n-Menge

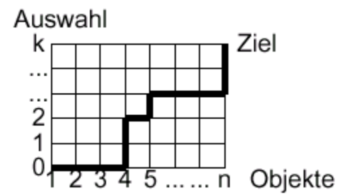
Repetition:
$\binom{n+k-1}{k} \to$ Anzahl aller monoton wachsenden Abbildungen einer k-Menge in eine n-Menge

Permutation:
$\binom{n}{k}k! \to$ Anzahl aller injektiven Abbildungen einer k-Menge in eine n-Menge

Variation:
$n^k \to$ Anzahl aller Abbildungen einer k-Menge in eine n-Menge

1.5.7 Woher kommt denn die 1 in der Formel $\binom{n+k-1}{k}$?

Beweis anhand vom Gitterwegargument:



Wir möchten k Elemente aus insgesamt n auswählen. Dabei kommt es auf die Reihenfolge nicht an. Daher können wir uns die n Elemente in einer Reihe aufgestellt vorstellen, wie etwa in der Grafik entlang der x-Achse. Wann immer wir ein Element auswählen, gehen wir einen Schritt nach oben in die k-Richtung. Die Anzahl aller Auswahlen, die wir treffen können, ist die Anzahl der kürzesten Wege von $(1,0)$ bis zum Ziel (n,k). Die kürzesten Wege, das sind die, bei denen man sich nur nach rechts oder nach oben bewegt, haben die Länge $n+k-1$, da man sich $n-1$ Schritte nach rechts bewegen muß (weil man schon bei 1 startet) und k Schritte nach oben. Wir codieren Bewegungen nach rechts durch eine 0 und Bewegungen nach oben durch eine 1. Dann haben wir eine $n+k-1$ Bit lange 0-1-Sequenz, die genau k Einsen enthalten muß. Wieviele solcher Sequenzen gibt es? Genau $\binom{n+k-1}{k}$.

1.5.8 Was sind Partitionszahlen?

Sei $1 \leq k \leq n$. $p(n,k)$ bezeichne die Anzahl der Zerlegungen von n in genau k natürliche Summanden.

$$p(0,0) := 1 \; und \; p(n,k) := 0 \; fr \; k=0,\ n>0 \; sowie \; fr \; k>n$$

$p(n,k)$ heißen Partitionszahlen.

Beispiel:
mögliche Zerlegungen von 4 in zwei Summanden sind 3+1 und 2+2; also $p(4,2) = 2$

Rekursionsformel für Partitionszahlen: (für $1 \leq k \leq n$)

$$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$$

1.5.9 Stirlingsche Zahlen zweiter Art:

Für $1 \leq k \leq n$ sei $S(n,k)$ die Anzahl der Partitionen einer n-Menge in genau k (natürlich nichtleere) Klassen. Eine solche Partition nennen wir dann eine k-Partition.

$S(0,0) := 1$
$S(n,k) := 0$ für $k = 0$, $n \neq 0$ sowie für $n < k$

Die Zahlen $S(n,k)$ heißen Stirlingsche Zahlen zweiter Art

Beispiel:
k-Partitionen $k = 1,3,4$ einer $4-Menge\,\{a,b,c,d\}$

$k =$	1	3	4
	abcd	a | b | cd	a | b | c | d
		a | c | bd	
		a | d | bc	
		b | c | ad	
		b | d | ac	
		c | d | ab	
$S(4,k) =$	1	6	1

Rekursionsformel:
$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$ für $n,k \in N$

1.5.10 Beweis der Rekursionsformel der Stirlingschen Zahlen 2-ter Art:

(Anmerkung: $|M|$ bedeutet die Anzahl der Elemente in M)
Es sei $|M| = n \geq 2$ und $a \in M$

Wir unterscheiden zwei Fälle:
1)$\{a\}$ ist selbst eine Klasse. Dann bilden die übrigen Klassen eine $(k-1)$-Partition von $M \setminus \{a\}$. Also $S(n-1,k-1)$ k-Partitionen gehören zu diesem Typ.

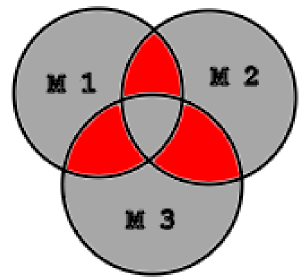
2) a ist in einer Klasse A mit $|A| \geq 2$. Wenn man nun a entfernt, also $A = A \setminus \{x\}$, dann hat man immer noch eine k-Partition einer $n-1$-elementigen Menge. Davon gibt es $S(n-1,k)$ Stück. Für jede solche Partition gibt es k Möglichkeiten, das Element a einer Klasse hinzuzufügen, da es ja k Klassen gibt. Dann hat man wieder eine Partition aus der Menge der Partitionen $S(n,k)$. Also gibt es insgesamt $k \cdot S(n-1,k)$ Partitionen in denen $a \in A$ mit $|A| \geq 2$ gilt.

1.5.11 Was ist die Formel vom Ein- und Ausschließen?

Die Anzahl der Elemente einer Vereinigung von disjunkten Teilmengenengen ist gleich der Summe der Anzahl der Elemente der einzelnen Teilmengen. Sind die Teilmengen aber nicht disjunkt, benötigen wir den Satz vom Ein- und Ausschließen.

$$|M_1 \cup ... \cup M_r| = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq r} |M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_k}|$$

3 endliche Teilmengen $M1, M2, M3$ einer Menge M:



Die Anzahl der Elemente der Vereinigung dieser drei Teilmengen entspricht der Anzahl der Elemente der hellgrauen Flächen in der Grafik. Die dunkelgrauen (im Original roten) Flächen müssen abgezogen werden. Also:

$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| \quad - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| \quad + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$

1.5.12 Wie erhalte ich die Anzahl aller surjektiven Abbildungen einer n-Menge in eine k-Menge?

- Über die Stirlingschen Zahlen mit der Formel $k!S(n,k) \longrightarrow$ Formel und Erklärung siehe Frage 1.5.13
- Mit der Formel vom Ein- und Ausschließen $\longrightarrow$ Formel siehe 1.5.14

1.5.13 Die Anzahl aller surjektiven Abbildungen einer n-Menge in eine k-Menge mittels Stirlingscher Zahlen:

Die Anzahl aller surjektiven Abbildungen $f : M \rightarrow N$ einer n-Menge in eine k-Menge beträgt $k! \cdot S(n,k)$. Da die Abbildung surjektiv sein soll, gilt $\forall y \in N \ : \ f^{-1}(y) \neq \emptyset$, d.h. auf jedes Element in N bildet mindestens ein

Element aus M ab. Da $f^{-1}(N) = M$ ist, bildet also jedes Element aus M auf genau ein $y \in N$ ab. Es können auch mehrere Elemente aus M auf ein Element aus N abbilden. Also induziert eine surjektive Abbildung eine k-Partition der Urbildmenge. Wieviele k-Partitionen einer n-Menge gibt es ? Genau $S(n,k)$. Betrachtet man nun eine solche Partition, so gibt es $k!$ verschiedene Möglichkeiten, wie diese auf N abbilden können. Insgesamt gibt es also $k! \cdot S(n,k)$ verschiedene surjektive Abbildungen.

1.5.14 Die Anzahl aller surjektiven Abbildungen einer n-Menge in eine k-Menge mittels dem Satz vom Ein- und Ausschließen:

Zuerst einmal gilt:

$$\#surj.\,Abb. = \#alle\,Abb. - \#nicht\,surj.\,Abb.$$

Die Anzahl aller abbildungen einer n-Menge in eine k-Menge ist k^n, denn ich habe n mal die Auswahl aus allen k Elementen. Wir definieren nun:

$$M_j = \{f : \{1,...,n\} \to \{1,...,k\} | \, j \notin f(\{1,...,n\}), 1 \leq j \leq k\}$$

Die Menge M_j ist also die menge aller Abbildungen, bei denen kein Element auf j abbildet. Damit gilt also:

$$f\,nicht\,surjektiv \;\Leftrightarrow\; f \in \bigcup_{j=1}^{k} M_j$$

Was ist nun $\left|\bigcup_{j=1}^{k} M_j\right|$? Nach der Formel vom Ein- und Ausschließen ist dies:

$$|M_1 \cup ... \cup M_k| = \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_s \leq k} |M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_s}|$$

Nun betrachten wir $M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_s}$ näher. Es gilt doch:

$$M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_s} = \{f : \{1,...,n\} \to \{1,...,k\} \setminus \{i_1,...,i_s\}\}$$

Dies ist die Anzahl aller Abbildungen einer n-Menge in eine ganz bestimmte $(k-s)$-Menge. Davon gibt es $(k-s)^n$. Desweiteren gibt es $\binom{k}{s}$ Arten aus einer k-Menge eine $(k-s)$-Menge zu machen. Also gibt es insgesamt

$$\binom{k}{s} (k-s)^n$$

solcher Abbildungen. Dies ergibt insgesamt:

$$\#surjektive\,Abbildungen = k^n - \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s+1} \cdot \binom{k}{s} (k-s)^n$$

1.5.15 Fibonacci-Zahlen:

Def.:
Die Fibonacci-Zahl $F(n)$ mit $n \geq 2$ gibt an, wie viele Null-Eins-Sequenzen der Länge $n-2$ es gibt, in denen keine zwei Einsen nebeneinander stehen.
Rekursionsformel:

$$F(0) = 0,\ F(1) = 1,$$
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

1.5.16 Beweis der Rekursionsformel für die Fibonacci-Zahlen:

Sei $n \geq 2$, a_n. Es gibt ja nur zwei Möglichkeiten:
1) letzte Stelle 0: $\underbrace{(............,0)}$ $\Rightarrow$ a_{n-1} zulässige Folgen, oder

2) letzte Stelle 1: $\underbrace{(..........,01)}$ $\Rightarrow$ a_{n-2} zulässige Folgen.

$\Rightarrow a_{n=a_{n-1}+a_{n-2}}$

Argumentation:
Wenn man bereits eine n-stellige 0-1-Sequenz hat, braucht man nur die letzte Stelle. Ist die letzte Ziffer eine 0, so kann die vorletzte Stelle 0 oder 1 sein. Es ist also nur die letzte Stelle blockiert. Für die erste bis vorletzte Stelle hat man also $f(n-1)$ Möglichkeiten.
Falls die letzte Stelle 1 ist, dann muß logischerweise die vorletzte Stelle 0 sein. Da die vorletzte Stelle nun auch blockiert ist, hat man für die verbleibenden Stellen noch genau $f(n-2)$ Möglichkeiten.

1.5.17 Rencontre-Zahlen:

benannt nach dem "probleme des Rencontres von Montmart"!
Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in S_n:

$$D_n := n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Beispiel:
n Ehepaare beim Tanzabend $\to$ Anzahl der Möglichkeiten, dass nur unverheiratete Paare miteinander tanzen.

1.5.18 Was sind die catalanischen Zahlen?

Die Anzahl C_n der Möglichkeiten, ein n-faches Produkt in einer Menge $(M,\cdot)$ mit einer Verknüpfung, die weder assoziativ noch kommutativ zu sein braucht, durch Klammerung auf Produktbildung von Paaren zurückzuführen, wird n-te catalanische Zahl genannt.
Dabei:

$C_0 := 0$ und $C_1 := 1$

Rekursionsformel:

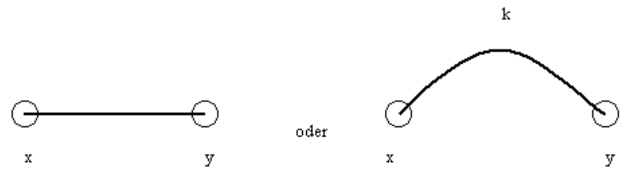
$$C_n = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \quad fr\ (n \geq 2)$$

z.B.
$2 \leq n \leq 3$
$n = 2 \qquad (x_1x_2) \qquad a_2 = 1$
$n = 3 \qquad ((x_1x_2)x_3), (x_1(x_2x_3)) \qquad a_3 = 2$

1.6 Graphentheorie

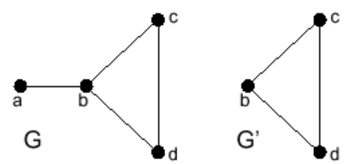
1.6.1 Was ist ein Graph?

Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ bestehend aus einer Menge V von Knoten und einer Menge E ungeordneter Paare (verschiedener oder gleicher) Elemente von V, die wir Kanten nennen.
Schreibweise: $k = \{x, y\}$ für eine Kante $k \in E$.



1.6.2 Was ist ein Abschnittsgraph?

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt Untergraph von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt.
Ein Untergraph heißt Abschnittsgraph von $G = (V, E)$, wenn E' genau aus allen Kanten von G besteht, die beide Ecken in V' haben. Dieser ist durch V' in G eindeutig bestimmt und heißt der von V' aufgespannte Abschnittsgraph.
Beispiel: Zu G ist G' der von $\{b, c, d\}$ aufgespannte Abschnittsgraph.



1.6.3 Was ist eine Zusammenhangskomponente? Wann heißt ein Graph zusammenhängend?

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die von den Äquivalenzklassen von V bezüglich Z aufgespannten Abschnittsgraphen heißen Zusammenhangskomponenten von G. Ist ganz G eine Zusammenhangskomponente, so heißt G zusammenhängend.
(wobei Äquivalenzrelation $Z : aZb :\Leftrightarrow$ es existiert ein Weg von a nach b)

Es gilt:
Ist $G = (V, E)$ zusammenhängend, so ist $|E| \geq |V| - 1$

1.6.4 Wie lautet der Isomorphiesatz für Graphen?

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V \to V'$ gibt, sodass gilt:

$$\forall x, y \in V \; : \; \{x, y\} \in E \; \Leftrightarrow \; \{f(x), \, f(y)\} \in E'$$

f heißt dann Graphisomorphismus.

1.6.5 Wann heißt ein Graph planar?

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar (plättbar), wenn er isomorph zu einem Graphen in der Ebene R^2 ist, bei dem sich die Kanten nur in den Ecken schneiden (kreuzungsfreie Kanten).

1.6.6 Wie erhalte ich von K_n die Anzahl der Ecken und der Kanten?

$K_n := (V, E)$ mit $|V| = n$ Ecken und $|E| = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ Kanten.

1.6.7 Sind $K_5, K_{3,3}$ planar? Beweise deine Antwort!

K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Beweis:
Um diese Frage zu beantworten, untersuchen wir erst, in welchem Verhältnis die Knoten zu den Kanten stehen bei planaren Graphen. Sei G zusammenhängend und planar mit n Ecken und $m \geq 3$ Kanten, dann gelten folgende Verhältnisse:

$$m \leq 3n - 6$$

Wenn jeder Kreis in G mindestens vier Kanten enthält gilt sogar:

$$m \leq 2n - 4$$

Für K_5 gilt $m = 10$ und $n = 5$. Dies setzen wir ein:

$$m = 10 \leq 3n - 6 = 15 - 6 = 9 \quad Widerspruch!$$

Für $K_{3,3}$ gilt $m = 9$ und $n = 6$. Dies setzen wir ein:

$$m = 9 \leq 2n - 4 = 12 - 4 = 8 \quad Widerspruch!$$

1.6.8 Wie lautet der Satz von Kuratowski?

Ein Graph ist planar genau dann, wenn er keinen zu K_5 oder $K_{3,3}$ homöomorphen Untergraph enthält?

1.6.9 Wann ist ein Graph homöomorph?

Zwei Graphen heißen homöomorph, wenn sie beide aus ein und demselben Graphen herleitbar sind durch Einfügen neuer Ecken vom Grad 2 in die Kanten.

1.6.10 Was ist eine Eulersche Linie?

Ein Weg(Kantenzug) in einem Graphen, indem jede Kante nur einmal besucht wird.

1.6.11 Was ist ein Eulerscher Zyklus?

Ein Kreis (Ausgangspunkt=Endpunkt) in einem Graphen, indem jede Kante nur einmal besucht wird.

1.6.12 Wie lautet die Eulersche Formel?

Sei G ein zusammenhängender, planarer Graph im R^2 und seien n, m und f entsprechend die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen von G. Dann gilt:

$$n - m + f = 2$$

1.6.13 Beweis der Eulerschen Formel:

Induktion nach m.
Induktionsanfang: $m = 0 \;\Rightarrow\; n = 1$ (G zusammenhängend) und $f = 1$ (unendliche Fläche), also gilt:

$$n + f = 1 + 1 = 2 = 0 + 2 = m + 2$$

Induktionsannahme: Sei $m \geq 1$ und $n + f = m + 2$ gelte für alle G mit $m - 1$ Kanten.

Induktionsschluß: Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1) Ist G ein Baum, so enthält er keinen geschlossenen Weg in G und es gilt $f = 1$.
Desweiteren gilt in Bäumen $|E| = |V| - 1$, also $m = n - 1$. Insgesamt also:

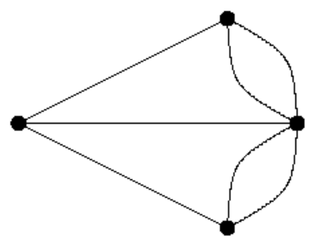
$$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = n - n + 1 + 1 = 2$$

2) G ist kein Baum. Sei e die Kante eines geschlossenen Weges. Dann ist $G' = (V, E \setminus \{e\})$ ein zusammenhängender Graph mit n Ecken, $m - 1$ Kanten und $f - 1$ Flächen. Laut Induktionsvoraussetzung gilt die Formel für $m - 1$, also:

$$n - (m - 1) + (f - 1) = 2 \;\Rightarrow\; n - m + f = 2$$

1.6.14 Wie lautet das Königsberger Brückenproblem und warum ist es nicht lösbar?

Das Königsberger Brückenproblem gilt als die Wurzel der Graphentheorie. Das Problem besteht darin, herauszufinden, ob es einen Rundgang durch Königsberg (heute Kaliningrad) gibt, welcher jede der sieben Brücken über die verschiedenen Arme der Pregel genau einmal benutzt, sodass man wieder am Startpunkt auskommt.
Graphentheoretische Interpretation:



Dabei werden die Brücken durch die Kanten symbolisiert und die Ufer durch Knoten. Es stellt sich nun also die Frage, ob es in diesem Graphen einen Eulerschen Zyklus gibt. Schon Euler konnte zeigen, dass das Königsberger Brückenproblem keine Lösung besitzt. Es gilt nämlich:
Ein Graph G besitzt genau dann einen Eulerschen Zyklus, wenn G zusammenhängend ist und keine Ecken ungeraden Grades besitzt.

<u>Beweis:</u>
Zu zeigen sind natürlich beide Richtungen:

"$\Rightarrow$": G besitzt nach Voraussetzung einen Eulerschen Zyklus. Wir zeigen nun, dass daraus folgt, dass G nur Ecken geraden Grades besitzt. Der Zyklus sei:

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_n, v_0)$$

Da der Graph G einen Eulerschen Zyklus Z enthält, ist er zusammenhängend. So muß es zu jeder Kante in Z, auf der man zu einem Knoten hinkommt, eine Kante in Z geben, auf der man diesen Knoten wieder verläßt. Trifft man also den Knoten x etwa k mal in Z an, so ist $d(x) = 2k$.

"$\Leftarrow$": Diese Richtung kan bewiesen werden, indem man einen Algorithmus angibt, der einen Eulerschen Zyklus erzeugt. Wir verwenden hier den <u>Tuckers Algorithmus</u>.

Nach Voraussetzung ist der Graph G zusammenhängend und jeder Knoten hat geraden Grad. Der Algorithmus arbeitet in zwei Phasen:

Zerlegungsphase:
In der Zerlegungsphase suchen wir Knoten $x \in V$ mit $\rho(x) \geq 2k$, $k \geq 2$, $k \in N$. Haben wir einen solchen Knoten gefunden, so zerlegen wir ihn in k Knoten mit Grad 2. Über eine Äquivalenzrelation merken wir uns jedoch, dass diese knoten zu einem Knoten gehören. Dabei zerfällt der Graph in lauter Zyklen und jeder Knoten hat Grad 2. Nun gehen über zur Aufbauphase:

Aufbauphase:
In der Aufbauphase nehmen wir uns einen beliebigen Zyklus und schauen, ob er alle Kanten des Graphen enthält. Ist dies nicht der Fall, dann gibt es auf dem Zyklus einen Knoten, der zusammen mit einem anderen Knoten in einer Äquivalenzklasse liegt. Diesen fügen wir nun an den betreffenden Knoten an und das Spiel geht von vorne los. Der Algorithmus terminiert auf jeden Fall, da die Knotenmenge eines Graphen und damit auch die Kantenmenge endlich ist.

1.6.15 Mit welchem Algorithmus kann man eine Eulersche Linie(Zyklus) aufbauen?

Tuckers Algorithmus (s. vorherige Frage - Aufbauphase)

1.6.16 Was ist ein hamiltonscher Weg/Kreis? Wann heißt ein Graph hamiltonsch?

Ein hamiltonscher Weg bzw. Kreis ist ein Weg bzw. Kreis, der alle Knoten enthält. Ein Graph heißt hamiltonsch, wenn er einen hamiltonschen Kreis enthält. Für dieses Problem ist kein effizienter Algorithmus bekannt, was eigentlich verwundert, da dieses Problem dem Eulerschen Zyklus sehr ähnlich sieht. Jedoch gibt es den Satz von Ore, der besagt: ein Graph ist genau dann hamiltonsch, wenn für alle Paare nicht benachbarter Knoten $x, y \in V$ gilt:

$$\rho(x) + \rho(y) \geq n = |V| > 2$$

2 Analysis

2.1 Reihen

2.1.1 Was ist eine Reihe?

Eine Reihe ist eine Folge spezieller Bauart. Sei $(a_n)_{n\in|N}$ eine Folge. Die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißt dann Reihe und wird mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.
Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in|N}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ zum einen die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in|N}$ der Partialsummen, als auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, konvergiert\,(divergiert) \;\Leftrightarrow\; (s_n)_{n\in|N} \, konvergiert\,(divergiert)$$

Eine Reihe konvergiert also, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.

2.1.2 Was ist die geometrische Reihe?

Die geometrische Reihe ist gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

und konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$ und divergiert für $|q| > 1$

2.1.3 Wann heißt eine Folge Cauchy-Folge?

Eine Folge $(a_n)_{n\in|N}$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, sodass gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \; fuer\, alle\, n, m \geq N$$

Mit anderen Worten: Der Abstand zwischen den Folgegliedern wird für genügend großen Index beliebig klein.

2.2 Konvergenzkriterien für Reihen

2.2.1 Was ist das allgemeine Cauchysche Konvergenzkriterium?

Sei $(a_n)_{n\in|N}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall\varepsilon > 0 \,:\, \exists N \in |N \,:\, \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \; fuer\, alle\, n \geq m \geq N$$

Beweis:
Es sei $s_p := \sum_{k=0}^{p} a_k$ die p-te Partialsumme. Dann gilt:

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Also ist die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge und damit die Reihe konvergent, da jede Cauchy-Folge in |R konvergiert.

2.2.2 Was besagt das Leibniz'sche Konvergenzkriterium?

Es sei $(a_n)_{n\in|N}$ eine Folge lauter nicht-negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Beispiele:
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

2.2.3 Was ist das Majorantenkriterium?

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in |N$. Desweiteren sei $(a_n)_{n\in|N}$ eine Folge für deren Glieder $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in |N$ gilt. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut.

2.2.4 Was ist das Quotientenkriterium

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und desweiteren gelte $0 < q < 1$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn es ein $n_0 \in |N$ gibt, sodass gilt:

$$\left|\frac{a_n + 1}{a_n}\right| \leq q \; fuer\, alle\, n \geq n_0$$

Desweiteren müssen natürlich alle $a_n \neq 0$ sein, für alle $n \geq n_0$.

2.2.5 Was ist das Wurzelkriterium?

Auch das Wurzelkriterium läuft auf eine konvergente Majorante hinaus. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Folge. Gibt es ein $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in |N$, sodass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \; fuer \; alle \; n \geq n_0$$

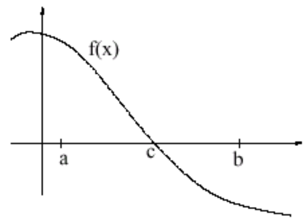
dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

2.3 Funktionen

2.3.1 Was besagt der Nullstellensatz?

Sei $a, b \in |R$, $a < b$, $I = [a, b]$ und $f : I \to |R$ eine stetige Funktion mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ (oder $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$), dann gibt es einen Punkt $c \in [a, b]$, sodass gilt:

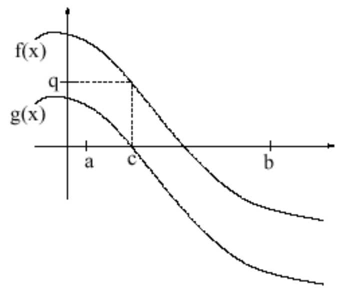
$$f(c) = 0$$



2.3.2 Was besagt der Zwischenwertsatz?

Der Zwischenwertsatz ist ein Korollar zum Nullstellensatz. Er besagt, wenn $a, b \in |R$, $a < b$, $I = [a, b]$ und $f : I \to |R$ gilt, die Funktion jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt. Sei etwa $f(a) \geq q \geq f(b)$ (siehe Zeichnung). Dann gibt es also ein $c \in [a, b]$, für das gilt:

$$f(c) = q$$



Beweis:
Wir setzen $g(x) = f(x) - q$. Dann gilt weiterhin $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$. Nach dem Nullstellensatz gibt es dann ein $c \in [a, b]$ mit $g(c) = 0$. Daraus folgt dann jedoch:

$$g(c) = f(c) - q = 0 \Rightarrow f(c) = q$$

2.3.3 Wann heißt eine Funktion (streng) monoton steigend/fallend?

Eine Funktion heißt
monoton wachsend $\Leftrightarrow x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
streng monoton wachsend $\Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
monoton fallend $\Leftrightarrow x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
streng monoton fallend $\Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

2.4 Exponentialfunktion

2.4.1 Wie kann man die e-Funktion herleiten? Wie lautet die e-Funktion?

Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist überall konvergent. Durch sie wird daher auf R eine Funktion definiert, die man als Exponentialfunktion exp bezeichnet. Es gilt also

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in R$$

Für $x = 1$ erhält man

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

2.4.2 Was wissen Sie über die Exponentialfunktion?

Mit der Exponentialreihe definiert man die berühmte Eulersche Zahl

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + ... = 2.7182818...$$

Die Exponentialfunktion $\exp : R \rightarrow R_+^*$ ist stetig und streng monoton. Man kann für $\exp(x)$ auch $e^x schreiben$, da

$$\exp(x) = \exp(1 * x) = \exp(1)^x = e^x \quad (folgt\, aus\, der\, Funktionsgleichung)$$

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (auch Additions-Theorem der Exponentialfunktion) lautet:
Für alle $x, y \in R$ gilt:

$$\exp(x + y) = \exp(x) * \exp(y)$$

Beweis:
Es ist

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ und\ \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

Nach dem Cauchy-Produkt ergibt sich unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes

$$\exp(x) * \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \quad mit$$

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-i}}{(k-1)!} = \frac{1}{k!} * \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i y^{k-i} = \frac{1}{k!}(x+y)^k$$

Daher gilt:

$$\exp(x) * \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x+y)^k = \exp(x+y)$$

2.4.3 Warum ist der Wertebereich $R_+^* > 0$?

Der erreichte Wert wird immer ≥ 1 sein, denn

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + ... = \frac{1}{1} + ... \geq 1 \neq 0$$

Bei negativen x:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \neq 0$$

2.4.4 Wie ist der Logarithmus definiert? Wie kann man die ln Funktion herleiten?

Die Exponentialfunktion $\exp : R \to R_+^*$ ist stetig und streng monoton. Also existiert eine ebenfalls stetige und streng monotone Umkehrfunktion

$$\ln = \exp^{-1} : R_+^* \to R$$

die *natürlicher Logarithmus* genannt wird. Für sie gilt die Funktionalgleichung

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Der natürliche Logarithmus ist also die auf dem Intervall $]0, \infty[$ definierte Umkehrfunktion.

2.5 Potenzreihen

2.5.1 Was versteht man unter einer Potenzreihe?

Das ist eine Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Für $x_0 = 0$ ergibt sich die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. x_0 nennt man den *Entwicklungspunkt* und die Zahlen a_n heißen *Koeffizienten*.
Wenn eine Funktion $f(x)$ in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darstellbar ist, dann nennt man diese Darstellung eine Entwicklung von $f(x)$ in eine Potenzreihe um x_0.

2.5.2 Eigenschaften einer Potenzreihe:

Jede Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergiert für $x = 0$.
Jede Potenzreihe hat einen Konvergenzradius R .

2.5.3 Was ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe?

Jede Potenzreihe hat einen Konvergenzradius R, d.h. die Reihe konvergiert für $|x| < R$ und divergiert für $|x| > R$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \begin{cases} absolut\, konvergent\ fuer\ |x| < R \\ divergent\ fuer\ |x| > R \end{cases}$$

Nach Cauchy-Hadamard sei a der größte Häufungswert der Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$;

$$Es\, ist\ R = \begin{cases} 0,\ falls\ a = \infty \\ \infty,\ falls\ a = 0 \\ 1/a,\ falls\ 0 < a < \infty \end{cases}$$

Für alle x mit $|x| < R$ ist die Folge dann konvergent.

2.5.4 Warum haben Potenzzreihen einen Konvergenzradius>0?

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n * (x - x_0)^n$ konvergiert für $|x| < R$. Da der Betrag einer Zahl immer positiv ist (oder halt Null) muß zwangsläufig $R > 0$ sein.

2.5.5 Warum ist die Potenzreihe für $|x| < R$ konvergent?

Es gelte $a_n \leq c^n$ für fast alle $n \in N$. Dann konvergiert die Reihe für $|x| < \frac{1}{c}$. Denn für $|x| < \frac{q}{c}$ mit $q < 1$ folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cdot \left(\frac{q}{c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cdot \frac{q^n}{c^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Da $|q| < 1$ vorausgesetzt wurde, ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine konvergente Majorante.

2.5.6 Warum ist die Potenzreihe für $|x| > R$ divergent?

Es gelte $a_n \geq d^n$ für unendlich viele $n \in N$. Dann divergiert die Reihe für $|x| \geq \frac{1}{d}$. Denn in diesem Fall ist $|a_n x^n| \geq 1$ für unendlich viele $n \in N$ und damit divergiert die Reihe.

2.5.7 Warum ist die Potenzreihe gliedweise integrierbar/differenzierbar?

Die Potenzreihen sind gliedweise differenzierbar, da sie und ihre Ableitung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $|x| < R$ gleichmäßig konvergieren und den gleichen Konvergenzradius haben.

2.5.8 Addition und Multiplikation von Potenzreihen:

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_a und r_b.
Dann gilt:

Summe:
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \; mit \; R = \inf\{r_a, r_b\}$

Produkt: Die Multiplikation von Potenzreihen erfolgt über das Cauchy-Produkt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_{n-k})\right)$$

Auch hier gilt $R = \inf\{r_a, r_b\}$.

2.5.9 Läßt sich die Summe $f(x) = \sum f_n(x)$ gliedweise differenzieren?

Die Summe läßt sich differenzieren, wenn
- sich alle $f_n(x)$ differenzieren lassen,
- $\sum f_n'(x)$ gleichmäßig konvergiert und
- $\sum f_n(x)$ für ein x konvergent ist.

2.5.10 Wie sehen die Ableitungen von Potenzreihen aus?

Ist $F(x)$ eine durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ dargestellte Funktion, so besitzt F Ableitungen beliebiger Ordnung und es gilt:

$$F^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) a_k x^{k-n}$$

Dies kann man auch schreiben als:

$$\frac{1}{n!} \cdot F^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k x^{k-n}$$

Ferner gilt:

$$\frac{1}{n!} \cdot F^{(n)}(0) = a_n$$

2.5.11 Was besagt der Abelsche Grenzwertsatz?

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Konvergiert die Reihe auch für $x = R$, so ist die Reihe im abgeschlossenen Intervall $[0, R]$ gleichmäßig konvergent. Die Funktion $f : \,]-R, R] \to |R$ ist dann im Punkt $x = R$ linksseitig stetig. Entsprechendes gilt, wenn die Reihe für $x = -R$ konvergiert.

2.5.12 Was besagt der Identitätssatz für Potenzreihen?

Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen mit jeweils positivem Konvergenzradius. Gilt dabei $f(x) = g(x)$ für alle $|x| < R$ oder auch nur $f(x_i) = g(x_i)$, wobei $x_i \neq 0$ und $(x_i)_{i \in N}$ eine Nullfolge ist, so sind beide Reihen identisch, d.h. es ist $a_n = b_n$ für alle $n \in N$.
Alternativ:
Sind die beiden Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ in einem gemeinsamen Intervall konvergent, so gilt $a_n = b_n$ für $n > 0$.

2.6 Taylor-Reihen

2.6.1 Was sind Taylor-Reihen? Allgemeine Form der Taylor-Reihe:

Es sei $I \subseteq R$ ein Intervall und $f : I \to R$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion.
Sei $a \in I$. Dann gilt

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k$$

die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt a.

2.6.2 Was muß man vor der Benutzung der Taylor-Reihe bei f(x) überprüfen?

- $f(x)$ muß beliebig oft differenzierbar sein
- Konvergenz
- Die Funktion muß gleich der Reihe sein, also das Restglied gegen Null konvergieren.

2.6.3 Wie lautet die Taylorsche Formel?

Es sei $I \subset R$ ein Intervall und $f : I \to R$ eine (n+1)-mal stetig differenzierbare Funktion.
Sei $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

2.6.4 Wie sieht das Restglied R_{n+1} aus?

Das Restglied gibt die Abweichung von $f(x)$ von der n-ten Partialsumme der Taylor-Reihe an.

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

2.6.5 Was sind die Taylor-Reihen von Potenzreihen? Zusammenhang von Taylor-Reihe und Potenzreihe! Warum sind diese Reihen gleich?

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 0. Dann ist die Taylorreihe im Entwicklungspunkt 0 gleich dieser Potenzreihe, denn die Taylorreihe sieht wie folgt aus:

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

Es gilt nun für eine Potenzreihe $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n$ bzw. $f^{(n)}(0) = n! a_n$. Setzen wir dies in die Taylor-Reihe ein, erhalten wir:

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n! a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Dies ist jedoch wieder die oben definierte Potenzreihe.
Allg.:
Jede konvergente Potenzreihe ist auch eine Taylor-Reihe und umgekehrt.

2.6.6 Warum entspricht die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ der Taylor-Reihe?

Die oben definierte Potenzreihe entspricht der Cosinusreihe $\longrightarrow f(x) = \cos(x)$.
$\cos(x) \forall x \in |R$ absolut konvergent
Jede konvergente Potenzreihe ist auch eine Taylor-Reihe und umgekehrt.

2.6.7 Taylor-Reihe von e^x

$f(x) = e^x$

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2.6.8 Taylor Entwicklung:

Sei I nicht entartetes Intervall mit $0 \in I$.
Sei f Potenzreihe für alle $x \in I$. Dann ist die Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt 0 gleich der Potenzreihe und sie konvergiert gegen $f(x)$.

2.6.9 Was ist die binomische Reihe?

Die binomische Reihe ergibt sich als Taylor-Reihe der allgemeinen Potenz $x \mapsto x^\alpha$ mit Entwicklungspunkt 1.
Sei $\alpha \in |R$. Dann gilt für $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

2.6.10 Wie lautet der binomische Lehrsatz?

Seien x, y reelle Zahlen und n eine natürliche Zahl. Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

2.6.11 Herleitung der binomischen Reihe aus der Taylor-Reihe:

Sei $\alpha \in |R$. Dann gilt für $|x| < 1$

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

1. Berechnung der Taylor-Reihe von $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit Entwicklungspunkt 0:

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} = k! \binom{\alpha}{k} (1+x)^{\alpha-k}$$

Da also $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$, lautet die Taylor-Reihe von f

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

2. Wir zeigen, dass die Taylor-Reihe für $|x| < 1$ konvergiert. Dazu verwenden wir das Quotientenkriterium. Wir dürfen annehmen, dass $\alpha \notin |N$ und $x \neq 0$.
Sei $a_n := \binom{\alpha}{n} x^n$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n}\right| = |x| \cdot \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|$$

Da $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = |x| < 1$, existiert zu θ mit $|x| < \theta < 1$ ein n_0, so dass

$$\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| \leq \theta \; fr \; alle \; n \geq n_0$$

Also konvergiert die Taylor-Reihe für $|x| < 1$.

2.7 TRIGONOMETRIE - Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens

2.7.1 Wie sind Sinus und Cosinus definiert?

Es gibt jeweils eine Reihendarstellung für $\sin x$ und $\cos x$:

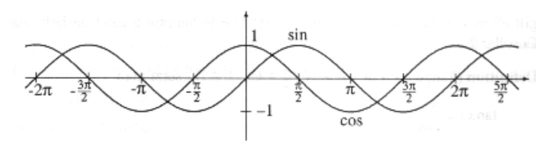
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Sie sind konvergent und periodisch mit der Periode 2π.
Es ergibt sich folgende Wetetabelle für sin und cos

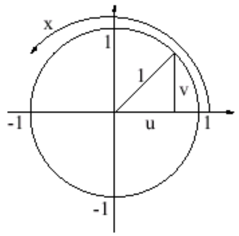
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

und folgende Graphen von Sinus und Cosinus



2.7.2 Was ist die Parametrisierung des Einheitskreises (+ Beweis)?

Gegeben seien $u, v \in |R$ mit $u^2 + v^2 = 1$. Dann gibt es ein eindeutiges $x \in |R$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$, sodass gilt $u = \cos x$ und $v = \sin x$. Dies bedeutet quasi, daß alle Paare $(\sin x, \cos x)$ auf dem Einheitskreis liegen.



Die obige Zeichnung verdeutlicht das Problem. Was ist denn jetzt überhaupt das x? Es soll zwischen 0 und 2π liegen. Welchen Umfang hat der Einheitskreis? Die Umfangsformel lautet $U = 2\pi \cdot r$. In unserem Fall ist der Radius $r = 1$, also ist der Umfang $U = 2\pi$. Das x liegt also irgendwo auf der Kreislinie.
Wie man sieht, können u und v entweder positiv oder negativ sein. x (der Pfeil auf der Kreislinie) ist mal größer und mal kleiner, je nachdem wie man die Vorzeichen von u und v wählt. Doch nun zum Beweis:
Zuerst einmal folgern wir aus $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin(x+\pi) = -\sin x$, dass

$$\sin\frac{3}{2}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

Aus $v^2 \leq 1$ folgert man $-1 \leq x \leq 1$. Wie wir schon gesehen haben, ist $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$. $\sin x$ ist stetig und nimmt daher alle Werte zwischen -1 und 1 an. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es ein $x \in R$, sodass $\sin x = v$. Weiter gilt:

$$u^2 = 1 - v^2 = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

Wir lösen auf und erhalten $u \pm \cos x$. Falls also $u = -\cos x$ ist, nehmen wir $y = \pi - x$ an. Dann stimmt die Behauptung immer noch:

$$\sin y = \sin(\pi - x) = \sin(-x + \pi) = -\sin(-x) = \sin(x) = v$$

$$\cos y = \cos(\pi - x) = \cos(-x + \pi) = -\cos(-x) = -\cos(x) = u$$

2.7.3 Was ist der Zusammenhang zwischen dem Einheitskreis und Sin/Cos Fkt.?

siehe 2.7.2

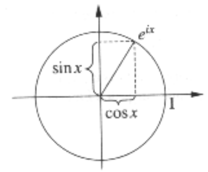
2.7.4 Herleitung der sin/cos-Funktion:

Für $x \in |R$ sei

$$\cos x := Re(e^{ix}),$$

$$\sin x := Im(e^{ix}).$$

Es ist also $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Eulersche Formel).
e^{ix} ist also ein Punkt des Einheitskreises der Gaußschen Ebene und $\cos x$ bzw. $\sin x$ sind die Projektionen dieses Punktes auf die reelle bzw. imaginäre Achse.



2.7.5 Leiten Sie die Sinus-Funktion mit Hilfe des Differenzialquotienten ab!

$$(\sin x)' = \lim_{h\to\infty}\left(\frac{\sin(x-h) - \sin(x)}{h}\right) = \lim_{h\to\infty}\left(\frac{\sin x \cosh + \sinh \cos x - \sin x}{h}\right) =$$

$$\lim_{h\to\infty}\left(\frac{\sin x(\cosh -1) \sinh \cos x}{h}\right) = \lim_{h\to\infty} \sin x \frac{\cosh -1}{h} + \lim_{h\to\infty} \frac{\sinh}{h}\cos x = \cos x$$

2.7.6 Wie sind Tangens und Cotangens definiert?

Der Tangens $\tan : D_1 \to |R$ mit $D_1 = \{x \in |R | x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k \in |Z\}$ ist definiert als:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Der Cotangens $\cot : D_2 \to |R$ mit $D_2 = \{x \in |R | x \neq k\pi, k \in |Z\}$ ist definiert als:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

2.7.7 Wie sind die Arcus-Funktionen definiert?

Die Arcus-Funktionen sind die Umkehrfunktionen zu sin, cos, tan, cot. $\sin x$ ist im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend und stetig. Also existiert die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \; mit \; x \mapsto \arcsin x.$$

Ebenso ist $\cos x$ im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und stetig. Daher existiert die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi] \; mit \; x \mapsto \arccos x.$$

Die Funktion Tangens ist im Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton und stetig, daher existiert die Umkehrfunktion

$$\arctan : |R \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

2.8 Differenzierbarkeit

2.8.1 Erklären Sie Differenzierbarkeit!

Sei $D \subset |R$ und $f : D \to |R$ eine Funktion. f heißt in einem Punkt $x \in D$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{x_0 \to x | x_0 \in D \setminus x} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt Differentialquotient oder Ableitung von f im Punkt x. Die Funktion f heißt differenzierbar in D, falls f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Man kann den Differentialquotienten auch darstellen als $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Geometrische Deutung:
Der Differentialquotient ist die Steigung der Sekante des Graphen in diesem Punkt

2.8.2 Welche Differentiationsregeln kennst Du?

1. Summenregel
2. Produktregel
3. Kettenregel
4. Quotientenregel
5. Umkehrregel

2.8.3 Summenregel:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

2.8.4 Produktregel

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

2.8.5 Kettenregel

Es sei f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar; $g \circ f$ sei definiert in einem Intervall I mit $x_0 \in I$.
Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$$

In dieser Formel bezeichnet man $g'(f(x_0))$ als die äußere Ableitung und $f'(x_0)$ als die innere Ableitung.

2.8.6 Was besagt die Quotientenregel?

Sind f und g in x_0 differenzierbar.
Ist $g(x_0) \neq 0$, dann ist f/g in einer (beliebig kleinen) Umgebung von x_0 definiert (d.h. $g(x) \neq 0$) und in x_0 differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) * g(x_0) - f(x_0) * g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

2.8.7 Umkehrregel:

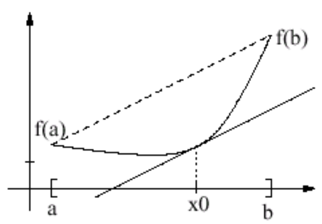
Ist $f : I \to |R$ eine streng monotone, stetige Funktion, so existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : I^* \to |R$ mit $I^* = f(I)$. Ist f im Punkt x differenzierbar und ist $f'(x) \neq 0$, dann ist auch f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

2.8.8 Was besagt der Mittelwertsatz?

Sei $a, b \in |R$, $a < b$ und $f : [a,b] \to |R$ eine stetige Funktion, die in jedem $x \in]a,b[$ differenzierbar ist. Dann gibt es ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Zu der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gibt es also eine parallele Tangente, die die Steigung im Punkt x_0 ist.

2.8.9 Was kann man mit Hilfe der ersten Ableitung über das Monotonieverhalten einer Funktion aussagen?

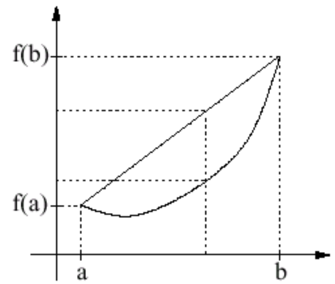
$f' > 0$	$\Rightarrow$	f streng monoton steigend
$f' \geq 0$	$\Leftrightarrow$	f monoton steigend
$f' < 0$	$\Rightarrow$	f streng monoton fallend
$f' \leq 0$	$\Leftrightarrow$	f monoton fallend
$f'' \geq 0$	$\Leftrightarrow$	f konvex
$f'' \leq 0$	$\Leftrightarrow$	f konkav

2.8.10 Wann heißt eine Funktion konvex (konkav)?

Sei $I \subseteq |R$ ein Intervall und $f : I \to |R$. f heißt konvex, wenn gilt:

$$\forall a, b \in I \wedge \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Eine Funktion f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist. Anschaulich bedeutet die Gleichung, dass sich alle Funktionswerte im Intervall $[a,b]$ unterhalb der Sekante durch die Punkte $(a,\ f(a))$ und $(b,\ f(b))$ befinden:



Dabei ist $\lambda a + (1-\lambda)b$ mit $\lambda \in [0,1]$ ein Punkt im Intervall $[a,b]$, denn für $\lambda = 0$ erhält man b und für $\lambda = 1$ erhält man a. Also ist $f(\lambda a + (1-\lambda)b)$ ein Funktionswert aus dem Intervall $[a,b]$. Und $\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ ist die Sekante durch die Punkte $(a,\ f(a))$ und $(b,\ f(b))$.

2.8.11 Welches andere Kriterium für Konvexität gibt es?

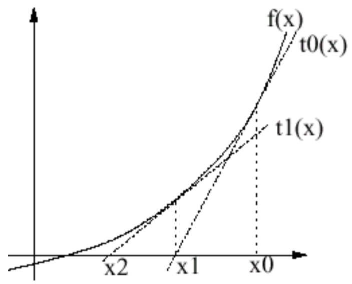
Sei $f : I \to |R$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$f\, ist\, konvex \Leftrightarrow f''(x) \geq 0\, fuer\, alle\, x \in I$$

So ist zum Beispiel die Funktion $f(x) = e^x konvex$, da $f''(x) = e^x$ im ganzen Definitionsbereich positiv ist. Ebenso ist $f(x) = x^2$ konvex, da $f''(x) = 2$ ist. Die Funktion $f(x) = x^3$ hingegen ist im Bereich $]-\infty, 0]$ konkav und im Bereich $[0, \infty[$ konvex, da $f''(x) = 6x$.

2.8.12 Was ist das Newton-Verfahren und wie funktioniert es?

Sei $D \subseteq |R$ und $f : D \rightarrow |R$ differenzierbar. Gesucht ist eine Nullstelle von f in D. Die Idee des Newton-Verfahrens ist es, die Funktion in einem Punkt $x_0 \in D$ durch die Tangente $t_0(x)$ im Funktionswert dieses Punktes anzunähern und die Nullstelle dieser Tangente als neuen Punkt zur Annäherung zu nehmen:



Die Tangente $t_0(x)$ im Punkt $x_0 ist\ t_0(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Gesucht ist die Nullstelle dieser Tangente, also das x für welches $t_0(x) = 0$ gilt. Also:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Es gilt also allgemein (auch Rosi Frage: Schreiben Sie doch mal die Folge der x_n auf!)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2.8.13 In welchem Fall konvergiert das Newton-Verfahren?

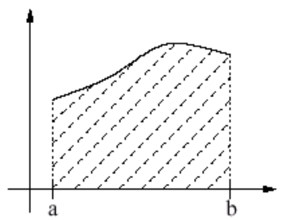
Sei $a, b \in |R$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow |R$ eine in $[a, b]$ zweimal differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt:
1. Es gibt genau eine Nullstelle $p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$.
2. Ist $x_0 \in [a, b]$ ein Punkt mit $f(x_0) \geq 0$ so ist die durch $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ definierte Folge für alle $n \in |N$ definiert, monoton fallend und konvergent.

Oder kurz:
Wenn die Funktion konvex ist, also die zweite Ableitung größer gleich 0 ist.

2.9 Integration

2.9.1 Wie ist die Integralrechnung motiviert?

Sei $a, b \in |R$, $a < b$ und $f : [a,b] \to |R^+$ stetig. Dann soll $\int_a^b f(x)dx$ der Inhalt der Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse sein:



Bei einfach gebauten Funktionen ist dann noch klar, wie man das Integral berechnet. Ist z.B. $f(x) = c$, so gilt $\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b - a)$.

2.9.2 Welche integrierbaren Funktionsklassen kennst Du?

Alle stetigen Funktionen $f : [a,b] \to |R$ sind integrierbar, ebenso wie alle monotonen Funktionen $g : [a,b] \to |R$

2.9.3 Wie lautet der Mittelwertsatz der Integralrechnung?

Es sei s das Infimum und S das Supremum von f im Intervall I ([a,b]). Dann gilt folgende Ungleichung für $a < b$

$$s \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq S$$

Die Zahl $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ mit $s \leq \mu \leq S$ heißt der Mittelwert von f im Intervall [a,b] und es ist

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

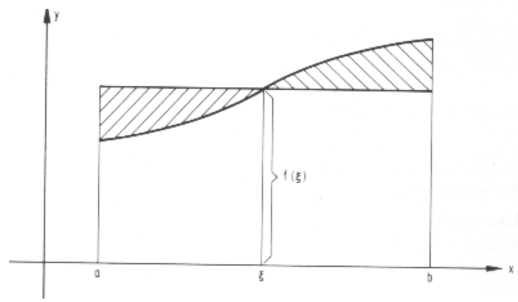
Ist $f(x) > 0$ in I, so bedeutet dies, dass der Flächeninhalt des Normalbereiches von f gleich ist dem Inhalt eines Rechteckes der Höhe μ über [a,b].

Ist nun f stetig in [a,b], so sind s und S Funktionswerte von f, und nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$, eine stetige Funktion

nimmt also ihren Mittelwert an. Für stetiges f gilt daher

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \; fuer \; ein \; \xi \in [a,b]$$

Die geometrische Deutung wird in der Zeichnung dargestellt: Die beiden schraffierten Bereiche haben denselben Flächeninhalt.



2.10 Differentation und Integration

2.10.1 Was ist eine Stammfunktion?

Es sei $I \subseteq |R$ und $f : I \to |R$. Eine Funktion $F : I \to |R$ heißt Stammfunktion von f, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Da beim Differenzieren Konstanten wegfallen, unterscheiden sich alle Stammfunktionen zu einer Funktion f nur um einen konstanten Summanden.
z.B.
$f(x) = x^2$
Stammfunktionen wären:
$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ oder $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7$ oder $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3$, da diese Funktionen differenziert x^2 ergeben, und das ist ja $f(x)$.

2.10.2 Zeige, dass sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden!

Zu zeigen ist also: Sei $I \subseteq |R$ und $f : I \to |R$. $F : I \to |R$ sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$G\, ist\, eine\, Stammfunktion\, von\, f \;\Leftrightarrow\; F - G = c\, mit\, c \in |R$$

"$\Rightarrow$": Sei G eine Stammfunktion. Also $G' = f = F'$. Dann gilt $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Demnach ist die Ableitung von $(F - G)$ für jedes $x \in I$ gleich 0. Daraus folgt, dass $F - G$ konstant sein muß.

"$\Leftarrow$": Es gelte $F - G = c$. Dies kann man umformen zu $G = F - c$. Dann ist jedoch $G' = F' = f$. Also ist G eine Stammfunktion zu f.

2.10.3 Hat jede Funktion eine Stammfunktion?

Ja, wenn sie stetig ist.

2.10.4 Wieviele Stammfunktionen gibt es?

Unendlich viele, da sie sich nur in einer Konstanten unterscheiden.

2.10.5 Beweisen Sie die Existenz einer Stammfunktion! Oder: Warum ist eine Stammfunktion gleich dem unbestimmten Integral?

Während wir bisher Funktionen immer über ein festes abgeschlossenes Intervall integriert haben, betrachten wir jetzt die eine Integrationsgrenze als variabel und erhalten so eine neue Funktion, das "unbestimmte Integral".
Sei $f : I \to |R$ eine stetige Funktion und $a \in I$. Für $x \in I$ sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Dann ist die Funktion $F : I \to |R$ differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Beweis:
Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\xi_h \in [x, x+h]$ (bzw. $\xi_h \in [x+h, x]$, falls $h < 0$) mit

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = hf(\xi_h).$$

Da $\lim_{h\to 0} \xi_h = x$ und f stetig ist, folgt

$$F'(x) = \lim_{h\to} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(hf(\xi_h)) = f(x).$$

2.10.6 Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Sei $f : [a, b] \to |R$ stetig

a)
$$F(x) := \int_a^x f(t)dt\; fuer\; x \in [a, b]\; ist\; eine\; Stammfunktion\; von\; f$$

b)

$$Ist\; F\; irgendeine\; Stammfunktion\; von\; f,\; so\; gilt\; \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Beweis zu b:
Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c$$

mit einem $c \in |R$ und dann folgt $c = F(a)$ wegen $\int_a^a f(t)dt = 0$.
Bei Kenntnis einer Stammfunktion F zu f ist also die Berechnung eines bestimmten Integrals kein Problem:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2.10.7 Was versteht man unter einem uneigentlichen Integral?

Die Integrationsgrenzen sind ∞ oder $-\infty$.

2.10.8 Wie ist die Gammafunktion definiert?

Die Gammafunktion $\Gamma : |R_+^* \to |R$ ist über ein uneigentliches Integral definiert:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

2.10.9 Wofür braucht man die Gammafunktion?

Die Gammafunktion interpoliert die Fakultät. Es gilt:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Für $n \in |N$ ist dann $\Gamma(n+1) = n!$.
Beweis siehe übernächste Frage!

2.10.10 Warum konvergiert die?

Sie konvergiert, weil die Integrale von 0 bis 1 und von 1 bis ∞ konvergieren. Das erste kann man durch $\frac{1}{x}$ abschätzen, weil $e^{-t} \leq 1$ ist. Das Integral von 1 bis ∞ konvergiert, weil die e-Funktion gegen Null konvergiert.

2.10.11 Beweisen Sie $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$!

Partielle Integration liefert

$$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_{t=\varepsilon}^{t=R} + x \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t} dt \,.$$

Durch Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ und $R \to \infty$ erhält man $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$. Da

$$\Gamma(1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t} dt = \lim_{R\to\infty} (1 - e^{-R}) = 1,$$

folgt aus dieser Funktionalgleichung

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1) \cdot ... \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

2.10.12 Was wissen Sie über die Integration rationaler Funktionen?

Partialbruchzerlegung:
Es sei also eine rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \, mit \, q(x) \neq 0 \in D$$

gegeben. Unser Ziel ist es nun $\int_a^b r(x)dx$ zu berechnen. Ist der Grad des Zählerpolynoms größer als der des Nennerpolynoms, so führen wir zuerst einmal eine Polynomdivision durch. Das Ergebnis ist ein Polynom und eventuell noch ein

Rest, bei dem der Zähler nun jedoch kleineren Grad als der Nenner hat. Das Polynom, welches nun vor dem rest steht, ist problemlos zu integrieren. Der Rest stellt sich als Hauptproblem heraus.
Jedes Polynom läßt sich als Produkt einiger Primpolynome darstellen. Wenn wir diese Darstellung erreichen könnten, wären wir schon einen Schritt weiter. Es stellt sich nun als äußerst hilfreich heraus, dass es nur zwei verschiedene Arten von Primpolynomen gibt, nämlich der Form

$$(x-a) \, bzw. \, ((x-b)^2 + c^2)$$

Wenn das Primpolynom $(x-a)$ ein Teiler des Polynoms $p(x)$ (hat nichts mehr mit dem $p(x)$ von oben zu tun) ist, gibt es also ein $q(x)$, sodass gilt: $p(x) = (x-a)q(x)$. Dann ist a jedoch eine Nullstelle von $p(x)$. kommt ein Primpolynom der Form $(x-b)^2 + c^2$ vor, müssen wir die komplexe Nullstelle von $p(x)$ berechnen. Wir erhalten eine Zerlegung also, indem wir die (eventuell komplexen) Nullstellen des Polynoms berechnen. Dies machen wir nun für das Nennerpolynom.

2.10.13 Wie ist die Voraussetzung für die Integration und Differentation von Funktionsreihen?

Differentation:
Die Glieder der Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ seien differenzierbar. Konvergiert die Folge der Ableitungen $(f_n'(x))_{n\in|N}$ gleichmäßigund konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ in wenigstens einem Punkt, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ gleichmäßig konvergent und stellt eine differenzierbare Funktion dar. Es gilt:

$$F'(x) = \left(\sum_{n=0}^\infty f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^\infty f_n'(x)$$

Integration:
$f_n(x)$ auf $[a,b]$ stetig, $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ gleichmäßig konvergent gegen $F(x)$, dann gilt

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)dx$$

2.10.14 Wie lautet der Grenzwertsatz?

von Abel?
siehe 2.5.11
Für Folgen:
Die Folge $(a_n)_{n\in|N}$ heißt konvergent gegen a, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder der Folge liegen. Dabei versteht man unter der ε-Umgebung von a das Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[:= \{x \in |R : |x-a| < \varepsilon\} = \{x \in |R : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$.
“Fast alle” bedeutet: alle, bis auf endlich viele.
Es gilt also genau dann $\lim a_n = a$, wenn in jedem Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ unendlich viele, außerhalb aber höchstens endlich viele Glieder der Folge liegen.

2.11 Stetigkeit

2.11.1 Wann heißt eine Funktion stetig?

Es sei $a \in D(f)$. Es heißt f stetig an der Stelle a, wenn $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert und gleich $f(a)$ ist. Ist f stetig auf $a \in D$, so heißt f stetig auf D.

2.11.2 Stetigkeit von x^2 zeigen:

Anhand vom $\varepsilon - \delta$-Kriterium zeigen.
Sei $D \subset |R$ und $f: D \to |R$ eine Funktion. f ist genau dann in $p \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon \; fr \; alle \; x \in D \; mit \; |x - p| < \delta$$

Man kann dies auch in Worten ausdrücken:
f ist genau dann in p stetig, wenn gilt: Der Funktionswert $f(x)$ weicht beliebig wenig von $f(p)$ ab, falls nur x hinreichend nahe bei p liegt.

2.11.3 Zeige, dass eine stetige Funktion injektiv ist, genau dann, wenn sie streng monoton ist.

Sei $f: I \to |R$ eine stetige Funktion und I ein nicht entartetes Intervall. Zu zeigen ist also:

$$f \; injektiv \Leftrightarrow f \; streng \; monoton$$

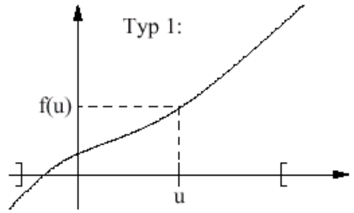
Natürlich sind hier beide Richtungen zu zeigen:
"$\Leftarrow$": Ist trivial. Wenn f streng monoton ist, gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ bzw. $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$. Damit bilden verschiedene x auf verschiedene $f(x)$ ab.

"$\Rightarrow$": Wir gehen also davon aus, dass f injektiv ist, d.h. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Wir setzen:

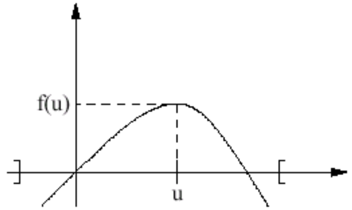
$$\alpha := \begin{cases} \inf I, \; falls \; I \; nach \; unten \; beschraenkt \\ -\infty \; sonst \end{cases}$$
$$\beta := \begin{cases} \sup I, \; falls \; I \; nach \; oben \; beschraenkt \\ \infty \; sonst \end{cases}$$

Dann gilt für einen Punkt $u \in I$ entweder
Typ 1:
$f(x) < f(u)$ für alle $x < y$ und $f(x) > f(u) >$ für alle $x > u$.

Typ2:
$f(x) > f(u) >$ für alle $x < y$ und $f(x) < f(u) >$ für alle $x > u$.



Denn für $u > \alpha$ ist $\{x|x < u\}$ ein Intervall, auf dem die stetige Funktion den Wert $f(u)$ nicht annimmt (wegen der Injektivität) und daher nach dem Zwischenwertsatz entweder nur Funktionswerte $< f(u)$ oder $> f(u)$ besitzt. Im Falle $u < \beta$ gilt dasselbe für $\{x|x > u\}$.
Desweiteren kann es nicht sein, dass $\{x \in I|x < u\}$ und $\{x \in I|x > u\}$ beide gleichzeitig nur Funktionswerte $< f(u)$ oder $> f(u)$ besitzen:



Denn dann könnte man $a, b \in I$ mit $a < u < b$ fixieren und aus dem Zwischenwertsatz würde folgen, dass die Funktion f alle Werte zwischen $[f(a), f(u)]$ bzw. $[f(b), f(u)]$ annehmen würde. Dann gäbe es zu einigen Funktionswerten Elemente, die beide auf denselben Funktionswert abbilden. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zur Injektivität.
Also sind alle Punkte $u \in I$ entweder vom Typ 1 oder vom Typ 2 und damit streng monoton.

2.12 Alles, was es sonst noch so gibt

2.12.1 Was ist ein b-adischer Bruch?

Für eine Zahl $b \geq 2$ ist ein b-adischer Bruch eine Reihe der Form:

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} ab^{-n}$$

Dabei gilt $k \geq 0$ und $0 \leq a_n < b$.
Im Alltag benutzt man b-adische Brüche zur Basis $b = 10$. So würde eine Zahl 321 wie folg aussehen:

$$3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

Es gilt nun, dass jeder b-adische Bruch eine Cauchy-Folge ist.

Wann heißt eine Folge Cauchy-Folge?
Eine Folge $(a_n)_{n \in |N}$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, sodass gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \; fuer \; alle \; n, m \geq N$$

Mit anderen Worten: Der Abstand zwischen den Folgegliedern wird für genügend großen Index beliebig klein.

2.12.2 Wie lautet der Approximationssatz von Weierstraß?

Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to C$ läßt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren.