Christian Blichmann, Mat.-Nr.: 0084334, Gruppe 3

Grundbegriffe der theoretischen Informatik (SS 2002)

Prof. Dr. Joachim Biskup

Leitung der Übungen: Martin Lauer, Thomas Leineweber,
Dirk Lühning, Ralf Menzel und Arnim Wedig

Übungsblatt Nr. 1

Abgabetermin: 29. April 2002, 12^{00} Uhr
Bitte auf jedes Blatt die Gruppennummer sowie
Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder schreiben

Aufgabe 1 (Definition von *Turing*-Programmen)
Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Hilfe der Definition von *Turing*-Maschinen bzw. *Turing*-Programmen

1. Kann es *Turing*-Programme mit genau einem Zustand geben?

   Ja, z.B. folgendes:

2. Kann es *Turing*-Programme mit keinem Zustand geben?

   Nein, da gemäß Definition immer mindestens ein Startzustand q_0 gegeben sein muss.

3. Kann eine *Turing*-Maschine das Blank B auf das Band schreiben?

   Ja, z.B.:

4. Müssen das Eingabealphabet Σ und das Bandalphabet Γ unterschiedlich sein?

   Das Eingabealphabet muss eine Teilmenge des Bandalphabets sein:

$$\Sigma = \Gamma \setminus \{B\} \Rightarrow \Sigma \subset \Gamma$$

5. Kann der Kopf einer *Turing*-Maschine in einer Konfiguration auf der gleichen Zelle stehen, wie in der Vorgängerkonfiguration?

   Ja, bei einer Stopp-Situation ist die Vorgängerkonfiguration gleich der folgenden Konfiguration.

Aufgabe 2 (Fortgeschrittenes Arbeiten mit *Turing*-Maschinen)
Beschreiben sie, wie ein *Turing*-Programm mit einem einseitig beschränkten Band aussehen kann, das ein *Turing*-Programm mit einem unbeschränkten Band simuliert.

1. Definiere Richtungen:

   links in Richtung Anfang des Bandes weisend.

   rechts in die **links** entgegengesetzte Richtung weisend.

   Analog: linker/rechter Rand (siehe 2.)

2. Definiere zusätzliche Blank-Zeichen in Γ (aber *nicht* in Σ):

   B_L An Position 0, dem linken Rand der Maschine stehende Markierung.

   B_R an beliebiger Position > 0 stehende Markierung für den Beginn eines gedachten, nach links laufenden Bandes.

   B_E markiert das Ende des „virtuellen" Bandes. Position von B_E ist weiter rechts als B_R.

   Die Maschine ist jetzt zunächst zu beiden Seiten hin begrenzt; B_E kann jedoch beliebig nach Rechts verschoben werden.

3. Die Maschine kann, setzt man den Kopf bei Startzustand q_0 auf eine Position rechts von B_L (aber links von B_R), „normal" arbeiten.

4. Findet der Kopf das Zeichen B_R, so muss der gesamte Bereich zwischen B_R und B_E eine Position nach rechts verschoben werden, inklusive aller dort stehenden Blank-Zeichen:

5. Findet der Kopf das Zeichen B_L, so müssen wir jetzt das gedachte Band, das bei B_R anfängt, benutzen, um das Verhalten einer unbeschränkten Maschine nachzubilden. Der Kopf wird dazu solange nach rechts bewegt, bis er rechts neben dem Zeichen B_R steht:

Wiederum kann die Maschine nun „normal“ arbeiten, allerdings muss sich das Verhalten der Maschine dergestalt ändern, als dass die Zeichen L und R aus d vertauscht werden. In der Praxis bedeutet das, dass man zweimal dieselbe Logik - nur mit vertauschten Richtungen - programmiert. Findet der Kopf jetzt wieder B_R, wird er wieder zurück bis auf B_L bewegt und die Maschine muss wieder mit der ursprünglichen Belegung von L und R arbeiten:

6. Findet der Kopf das Zeichen B_E so wird es einfach um eins nach rechts verschoben:

Das beschriebene Verfahren funktioniert umso effizienter, je größer der ursprüngliche Abstand zwischen B_L, B_R und B_E ist, und der Kopf ungefähr in der Mitte zwischen B_L und B_R steht:

Aufgabe 3
Sei TM ein *Turing*-Programm mit Zustandsmenge Q, Bandalphabet Γ, Blank B, Startzustand q_0 und Zustandsübergangsfunktion δ, die bei einer Eingabe der Länge n auf maximal $s(n)$ Bandzellen arbeitet. Zeigen Sie: Wenn TM auf einer Eingabe x der Länge n hält, so hält TM auf der Eingabe x nach spätestens $|Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n)$ Schritten.

Beh.: $\sigma(TM)(x) \downarrow \Rightarrow Time(TM) \leq |Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n)$

Beweis: Es sei $Time(TM) : \mathrm{N} \mapsto \mathrm{N}$ gdw. $\sigma(TM)(x) \downarrow$.

Aus $\delta : Q \times \Gamma \mapsto Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$ folgt o.B.d.A:

$\forall n > 0 : s(n) = n + 1$ (Bei n Bandzellen max. $n + 1$ Schritte in eine Richtung)

Damit $Time(TM) = |Q| \cdot |\Gamma| \cdot s(n)$, da δ auf $Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$ abbildet.

$\Rightarrow |Q| \cdot |\Gamma| \cdot s(n) \leq |Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n)$, q.e.d.

Aufgabe 4
Betrachten Sie das Turingprogramm für die Sprache $L = \{0^i 1^i | i \geq 1\}$, das in der Vorlesung vorgestellt wurde.

1. Bestimmen Sie die maximale Anzahl der Schritte $Time(TM)(n)$, die die Turingmaschine bei einer Eingabe $x \in L$ der Länge n macht.
2. Skizzieren Sie $Time(TM)(n)$ für Eingaben $x \notin L$ der Länge n macht.

1. Da die Maschine bei korrekter Eingabe stets von Links nach Rechts (bis B) läuft, ein Zeichen mit B überschreibt und den Vorgang in der anderen Richtung wiederholt, erhalten wir folgenden Term für die Anzahl der Schritte:

$$\begin{aligned} Time(TM)(n) &= n + (n+1) + (n-1) + n + (n-2) + (n-1) + (n-3) + (n-2) + \cdots + 0 + 1 \\ &= (2n+1) + (2n-1) + (2n-3) + \cdots + 0 + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} 2n + 2i - 1 \end{aligned}$$

2. Falls $x \notin L$ gilt, ist die maximale Anzahl von Schritten von Schritten gleich groß, da erst abgebrochen werden kann, wenn die Anzahl der Nullen ungleich der Zahl der Einsen ist.

Aufgabe 5
Welche Sprache wird durch das (auf dem Aufgabenblatt stehendem) Turingprogramm akzeptiert? Zeigen Sie dies mit hilde eines Zustandsgraphen.

Die Sprache $L = \{(0011)^i | i \geq 0\}$:

Aufgabe 6
Erstellen Sie Turingmaschinen für folgende Probleme:

1. **Eingabe** Zahl $b \geq 1$ im Binärformat mit MSB links

   Ausgabe Zahl $b - 1$ im Binärformat mit MSB links, Kopf zeigt auf MSB der Zahl

2. **Eingabe** Zahl $b \geq 1$ im Binärformat mit MSB links

   Ausgabe Zahl $b \cdot 2$ im Binärformat mit MSB links, Kopf zeigt auf MSB der Zahl

Es soll davon ausgegangen werden, dass die Eingabe jeweils korrekt ist und aus mindestens einem Zeichen besteht.